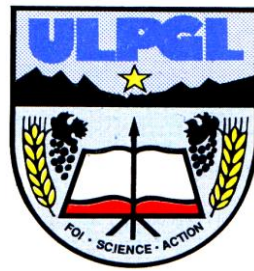


**UNIVERSITÉ LIBRE DES PAYS DES GRANDS LACS
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
APPLIQUÉES**

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL



BP. 368 GOMA

www.ulpgl.net

**ANALYSE DE LA DEFORMATION D'UNE
PLAQUE RECTANGULAIRE SOUS
DIFFERENTES METHODES : cas des
méthodes analytiques et numériques**

Par KITUMAINI CIGOGO Prince

Travail présenté en vue de l'obtention du Diplôme de
Bachelor en Sciences de l'Ingénieur

Option : Génie Civil

Directeur : Prof. Alain NKIEDEL AKWIR

Encadreur : Ir CIRHUZA BADESIRE Paterne

ANNÉE ACADÉMIQUE 2023 - 2024

Epigraphe

« Tout est mathématique, ou tout peut être mathématisé »

Henri Poincaré

Dédicace

~ À toute ma famille ~

KITUMAINI CIGOGO Prince

Remerciements

Ce mémoire ne saurait être considéré comme le fruit exclusif de nos propres efforts, mais se veut plutôt l’aboutissement d’un travail collectif auquel de nombreuses personnes ont contribué. Il nous paraîtrait injuste de ne pas rendre hommage à toutes celles et ceux dont le soutien a été précieux.

Tout d’abord, nous adressons notre profonde gratitude à l’Éternel Dieu pour la grâce incessante qu’Il nous témoigne. Ensuite, nous souhaitons remercier chaleureusement notre directeur, Prof. Dr. Ir. Alain AKWIR NKIEDEL, pour son accompagnement éclairé tout au long de ce projet, ainsi que notre encadreur, l’Ir. CIRHUZA BADESIRE Paternelle, dont les conseils avisés et les remarques constructives ont grandement enrichi ce travail, et ce malgré ses innombrables engagements.

Nous tenons également à exprimer notre reconnaissance à nos très chers parents APENDA CIGOGO Mandela, FURAH BANYWANE, MAVUNA KIRAYI Mana, JUSTINE MURHONYI qui s’investissent sans relâche pour garantir notre formation et œuvrer à notre épanouissement. Un merci particulier est également adressé à l’ensemble de nos proches, membres de la famille et amis, ainsi qu’à toutes les personnes, de près ou de loin, ayant contribué à notre parcours.

Enfin, nous ne saurions oublier nos collègues de promotion, dont l’amitié et le soutien constant ont rendu cette expérience plus riche et plus humaine.

Chaque mot de remerciement reflète notre sincère reconnaissance envers ceux qui ont participé à cette aventure, et à qui nous devons bien plus que ces quelques lignes.

KITUMAINI CIGOGO Prince

Résumé

Ce mémoire analyse et compare différentes méthodes pour déterminer la déformation des plaques rectangulaires, problème fondamental en génie civil et mécanique des structures. L'objectif est d'évaluer la concordance et la précision des approches analytiques classiques par rapport aux méthodes numériques courantes, incluant la méthode des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (MEF) via le logiciel Abaqus. Le travail présente les fondements théoriques et les méthodologies, puis applique ces approches à une plaque carrée en acier soumise à une charge uniformément répartie, en considérant les conditions aux limites SSSS et SSCC. Les déplacements maximaux obtenus par chaque méthode sont calculés, présentés et comparés quantitativement. Les résultats confirment que les méthodes analytiques fournissent des solutions de référence exactes. Les méthodes numériques montrent une convergence vers ces solutions avec l'affinage du maillage, validant ainsi leur efficacité. L'analyse comparative a permis d'évaluer leurs performances relatives en termes de précision et de comportement de convergence (monotone pour la MDF, non monotone pour la MEF). Ce travail démontre ainsi l'applicabilité et les caractéristiques des méthodes étudiées pour l'analyse des plaques, renforçant la confiance en l'utilisation des outils numériques pour des configurations potentiellement plus complexes où les solutions analytiques sont limitées.

Mots clés : Analyse d'une plaque, méthodes numériques, méthodes analytiques, Abaqus

Abstract

This memoir analyzes and compares different methods to determine the deformation of rectangular plates, a fundamental problem in civil engineering and structural mechanics. The objective is to evaluate the agreement and accuracy of classical analytical approaches compared to common numerical methods, including the Finite Difference Method (FDM) and the Finite Element Method (FEM) via the Abaqus software. The work presents the theoretical foundations and methodologies, then applies these approaches to a square steel plate subjected to a uniformly distributed load, considering SSSS and SSCC boundary conditions. The maximum displacements obtained by each method are calculated, presented, and quantitatively compared. The results confirm that analytical methods provide exact reference solutions. Numerical methods show convergence towards these solutions with mesh refinement, thus validating their efficiency. The comparative analysis allowed evaluating their relative performance in terms of accuracy and convergence behavior (monotonic for FDM, non-monotonic for FEM). This work thus demonstrates the applicability and characteristics of the studied methods for plate analysis, reinforcing confidence in the use of numerical tools for potentially more complex configurations where analytical solutions are limited.

Keywords : Plate analysis, Analytical method, Numerical method, Abaqus

Table des matières

Epigraphe	i
Dédicace.....	ii
Remerciements.....	iii
Résumé.....	iv
Table des matières.....	vi
Liste des abréviations /notations.....	ix
Liste des tableaux.....	xi
Liste des figures	xii
Introduction Générale	1
Chapitre 1 Généralités sur les plaques	6
1.1 Introduction.....	6
1.2 Généralité sur les plaques	7
1.3 Les déformations des plaques	8
1.4 Définition et classification des plaques.....	8
1.5 Comportement générale des plaques	10
1.6 Champs des déformation-Relations cinématiques	11
1.7 Champs des Contraintes et résultantes de contraintes	12
1.8 Equations d'équilibre d'une plaque	15
1.9 Équation gouvernante de la flexion des plaques.....	17
1.9.1 Réduction de l'ordre du problème de flexion de la plaque.....	18
1.10 Conditions aux limites	19
1.10.1 Bord encastré	19

1.10.2	Bord simplement appuyé	20
1.10.3	Bord libre	20
1.10.4	Bord glissant	21
1.11	Théorie exacte des plaques	21
1.12	Méthode d'analyse des problèmes de plaques	22
1.12.1	Méthodes analytiques.....	22
1.12.2	Méthodes numériques :	23
1.13	Conclusion	23
Chapitre 2 Méthodologie		25
2.1	Introduction.....	25
2.2	METHODES ANALYTIQUES.....	Erreur ! Signet non défini.
2.2.1	Introduction.....	25
2.2.2	METHODE DE NAVIER (Solution par des séries doubles)	26
2.2.3	METHODE DE LEVY	Erreur ! Signet non défini.
2.2.4	Comparaison entre la solution de Navier et celle de Lévy	50
2.3	METHODES NUMERIQUES.....	51
2.3.1	Introduction.....	51
2.3.2	METHODE DES DIFFERENCES FINIES (MDF)	51
2.3.3	METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	66
2.3.4	Présentation du logiciel ABAQUS	74
2.3.5	Conclusion	78
Chapitre 3 Résultats et discussions.....		79
3.1	Introduction.....	79
3.2	Hypothèses de calcul.....	79
3.2.1	Application Numérique.....	79

3.2.2	Analyse avec les méthodes Analytiques	81
3.2.3	Analyse avec les méthodes numériques~.....	89
3.3	Comparaison des résultats obtenus	97
3.3.1	Définition de l'indicateur de comparaison	98
3.3.2	Analyse et Interprétation des résultats	101
3.4	Conclusion	103
	Conclusion générale & perspectives.....	104
	Bibliographie.....	106
	Annexe	110
	Annexe A : Quelques caractéristiques mécaniques des matériaux [10]	110
	Annexe B : Code MATLAB pour l'analyse d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur 4 bords et soumise à une charge uniformément répartie selon la méthode de Navier.....	111
	Annexe C : Code MATLAB pour l'analyse d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur 4 bords et soumise à une charge uniformément répartie selon la méthode de Lévy	113
	Annexe D : Code MATLAB pour l'analyse d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur 2 bords opposés et encastrée sur les deux autres, soumise à une charge uniformément répartie selon la méthode de Lévy.....	115

Liste des abréviations /notations

a, b	Dimensions de la plaque (longueur et largeur de la plaque)
CAE	Computer-Aided Engineering
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
D	Rigidité en flexion
$[D]$	Matrice d'élasticité
E	Module d'élasticité
G	Module de cisaillement
h, λ	Largeur du maillage, facteur numérique, profondeur
$[k]$	Matrice de raideur d'un élément fini
$[K]$	Matrice de raideur de la structure complète
L	Longueur, portée
m, n	Entier, facteur numérique
M	Moment par unité de distance, moment, somme des moments
MDF	Méthode des différences finies
MEF	Méthode des éléments finis
M_x, M_y	Moments de flexion par unité de distance selon les axes x et y
M_{xy}	Moments de torsion par unité de distance sur le plan x
p, p_o	Intensité d'une charge transversale répartie par unité de surface ou de longueur, pression, force surfacique par unité de surface
P	Force concentrée
$\{Q\}$	Matrice des forces nodales d'un élément fini
Q_x, Q_y	Force de cisaillement par unité de distance sur les plans x et y

R	Forces de réaction
$SSCC$	Condition aux limites avec 2 bords opposés simplement appuyés et 2 autres encastrés
$SSSS$	Condition aux limites avec 4 bords simplement appuyés
t	Épaisseur
u, v, w	Déplacements dans les directions x , y , et z ;
x, y, z	Distances, coordonnées rectangulaires
γ	Déformation de cisaillement,
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Déformations de cisaillement dans les plans xy , yz et zx
δ	Flèche (déformation), opérateur des différences finies, symbole vibrationnel
$\{\delta\}$	Matrice des déplacements nodaux d'un élément fini
ε	Déformation normale
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations normales selon les directions x , y et z
θ	Déplacement nodal angulaire
ν	Coefficient de Poisson
Π	Énergie potentielle
σ	Contrainte normale
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales sur les plans x , y et z
τ	Contraintes de cisaillement
τ_x, τ_y, τ_z	Contraintes de cisaillement selon les directions y , z et x

Liste des tableaux

<i>Tableau 2-1 valeur de qmn ou pmn sous différents chargements pour la méthode de Navier [3].....</i>	34
<i>Tableau 2-2 valeur de qmn ou pmn sous différents chargements pour la méthode de Lévy [3].....</i>	44
<i>Tableau 3-1 Caractéristiques de la plaque en acier.....</i>	80
<i>Tableau 3-2 Résultats des déplacements verticaux avec la méthode de Navier pour la plaque (1).....</i>	83
<i>Tableau 3-3 Résultats des déplacements verticaux avec la Méthode de Lévy pour la plaque (1).....</i>	85
<i>Tableau 3-4 Résultats des déplacements verticaux avec la méthode de Lévy pour la plaque (2).....</i>	88
<i>Tableau 3-5 Résultats des déplacements verticaux max à différents maillages avec la MDF pour la plaque (1) en fonction des différents maillages</i>	90
<i>Tableau 3-6 Résultats des déplacements verticaux à différents maillages avec la MDF pour la plaque (2).....</i>	91
<i>Tableau 3-7 Résultats des déplacements verticaux à différents maillages avec la MEF dans Abaqus pour la plaque (1)</i>	94
<i>Tableau 3-8 Résultats des déplacements verticaux à différents maillages avec la MEF dans Abaqus pour la plaque (2)</i>	96
<i>Tableau 3-9 Sommaire de résultats -Plaque (1) &Plaque (2)</i>	99

Liste des figures

<i>Figure 1-1 : Schéma d'une plaque mince avant et après déformation : (a) avant déformation (b) après déformation [9].....</i>	8
<i>Figure 1-2 Description géométrique d'une plaque [13]</i>	9
<i>Figure 1-3 : (a) Une plaque d'épaisseur constante ; (b) une partie de la plaque avant et après déformation [10]......</i>	11
<i>Figure 1-4 : Contraintes dans la moitié inférieure et contrainte normale au plan médian d'un élément de plaque [10, 15]......</i>	13
<i>Figure 1-5 : Résultantes de contraintes positives et charge sur un élément de plaque [11].</i>	16
<i>Figure 1-6 : Schéma d'une plaque avec bord encastré [10, 19]</i>	19
<i>Figure 1-7 Schéma d'une plaque avec bord simplement appuyé [10, 19].....</i>	20
<i>Figure 1-8 Schéma d'une plaque avec bord libre [19]</i>	20
<i>Figure 1-9 Schéma bord glissant [16]</i>	21
<i>Figure 2-1 Localisation du système de coordonnées pour la méthode de Navier [10]</i>	26
<i>Figure 2-2 Position standard du système de coordonnées dans la méthode de Lévy.....</i>	36
<i>Figure 2-3 plaque simplement appuyée sur ses 4 bords</i>	40
<i>Figure 2-4 Plaque soumise à des moments appliqués sur deux bords parallèles [10].....</i>	46
<i>Figure 2-5 Superposition d'une plaque encastrée le long de deux bords opposés et appuyée sur les deux autres [15].....</i>	48
<i>Figure 2-6 a) Approximation de $f(x)$ par la méthode des différences finies ; b) Frontière rectangulaire divisée en un maillage carré [25, 10].</i>	53
<i>Figure 2-7 Schémas de Coefficients pour Certains Opérateurs de Différences Finies [13].....</i>	58
<i>Figure 2-8 Représentation des conditions aux limites pour la MDF ordinaire [13]</i>	59
<i>Figure 2-9 plaque simplement appuyée avec une charge uniforme discrétisée en : (a) maillage 4X4 ; (b) maillage 8X8 [10].....</i>	60

<i>Figure 2-10 Plaque carrée avec deux bords opposés encastres et deux bords simplement appuyés [13].</i>	64
<i>Figure 2-11 Subdivision de la plaque en maillage 4X4(A) ; maillage 8X8(B) [14]</i>	65
<i>Figure 2-12 plaque divisée en éléments finis [13, 10]</i>	67
<i>Figure 2-13 (a)Elément fini rectangulaire [15]</i>	71
<i>Figure 2-14 Organisation d'Abaqus [38]</i>	76
<i>Figure 3-1 Modélisation sous ABAQUS (à gauche) d'une plaque carrée avec deux bords simplement appuyés et deux bords encastres, soumise à une charge uniformément répartie p_0 (Plaque 2).</i>	80
<i>Figure 3-2 Modélisation sous ABAQUS (à gauche) d'une plaque carrée avec quatre bords simplement appuyés, soumise à une charge uniformément répartie p_0 (Plaque 1)</i>	81
<i>Figure 3-3 Déformation de la plaque (1) après application de la charge avec la méthode de Navier sous MATLAB</i>	84
<i>Figure 3-4 Déformation de la plaque avec la méthode de Lévy sous MATLAB</i>	86
<i>Figure 3-5 convergence des résultats avec Méthode des différences finies</i>	92
<i>Figure 3-6 Déformation de la plaque (1) chargée sous Abaqus en considérant différents maillages : (A)maillage 2X2, (B)maillage 4X4, (C)maillage 6X6, (D)maillage 8X8, (E)maillage 10X10, (E)maillage 60X60</i>	94
<i>Figure 3-7 Déformation de la plaque (2) sous Abaqus en considérant différents maillages :(a) maillage 2X2, (b)maillage 4X4, (c)maillage 6X6, (d)maillage 8X8, (e) maillage 10X10, (f)maillage 60X60</i>	95
<i>Figure 3-8 Convergence des résultats avec Abaqus Pour la plaque (1) & (2)</i>	97
<i>Figure 3-9 Diagramme de Comparaison résultats plaque (2)</i>	100
<i>Figure 3-10 Diagramme de comparaison des résultats plaque (1)</i>	100

Introduction Générale

L'étude des déformations des plaques rectangulaires constitue un pilier fondamental de la mécanique des structures. Ces éléments, omniprésents dans l'industrie (aéronautique, construction navale, génie civil : construction de bâtiments, des ponts, etc.), sont soumis à diverses sollicitations qui peuvent entraîner des déformations pouvant compromettre leur intégrité. Comprendre et maîtriser ces phénomènes est crucial pour garantir la sécurité et la durabilité des ouvrages. Face à la complexité croissante des structures modernes et aux exigences accrues en matière de performance, il est nécessaire de disposer d'outils d'analyse précis et efficaces [1].

Dans ce cadre, l'étude des déformations des plaques rectangulaires repose principalement sur la résolution de l'équation de la plaque de Kirchhoff-Love, qui décrit le comportement des plaques sous divers types de chargement [2, 3].

Historiquement, les approches analytiques ont joué un rôle crucial dans la modélisation des plaques. Parmi ces approches, les méthodes de Navier et de Lévy se distinguent par leur capacité à fournir des solutions exactes pour des plaques rectangulaires sous des conditions spécifiques de support et de charge [3, 4]. La méthode de Navier, introduite en 1820, repose sur l'utilisation de séries trigonométriques double pour résoudre les équations différentielles régissant le comportement des plaques, particulièrement lorsqu'elles sont simplement supportées sur leurs bords. La méthode de Lévy, présentée en 1900, quant à elle, propose l'utilisation d'un développement en séries de Fourier simple. Elle s'applique à la flexion des plaques avec une plus grande variété de conditions de bord, notamment celles avec des bords encastres [2, 4].

Cependant, ces méthodes analytiques, bien que précises, sont souvent limitées à des cas spécifiques de géométrie et de conditions de support, ce qui limite leur applicabilité dans des

situations plus complexes rencontrées en pratique [2]. C'est ici que les méthodes numériques, comme la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des différences finies (MDF), prennent tout leur sens. Ces méthodes permettent de résoudre les problèmes de déformation de plaques dans des configurations complexes, où les solutions analytiques ne sont pas facilement applicables [5].

La méthode des éléments finis est devenue l'une des techniques les plus répandues pour l'analyse des structures, en raison de sa flexibilité et de sa capacité à traiter des géométries complexes et des conditions de chargement variées. Elle découpe le domaine d'étude en sous-domaines plus simples, appelés éléments qui sont interconnectés entre eux par des nœuds, et utilise des fonctions d'interpolation pour approximer le comportement du matériau dans chaque élément [5]. En parallèle, la méthode des différences finies, bien que plus simple en termes de formulation, offre une alternative efficace pour les analyses où les solutions analytiques sont difficiles à obtenir et où l'utilisation de la méthode des éléments finis serait trop complexe ou coûteuse. Cette méthode est basée sur la technique du développement en série de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donnée si on connaît la valeur de la fonction et ses dérivées en un point voisin en espace ou en temps [6, 7].

La déformation des plaques rectangulaires constitue un défi majeur en mécanique des structures, crucial pour la conception et la sécurité des infrastructures. Bien que des solutions analytiques soient disponibles pour des cas simples, telles que les plaques circulaires ou rectangulaires avec des conditions aux limites standardisées, les plaques rectangulaires soumises à des conditions aux limites plus complexes restent peu étudiées [8]. Ce mémoire vise à aborder cette lacune en analysant la déformation des plaques rectangulaires en utilisant des méthodes analytiques (Navier et Levy) et des méthodes numériques (Méthode des Différences Finies et Méthode des Éléments Finis). ***Le problème central consiste à développer, appliquer et comparer ces différentes approches.***

Les méthodes analytiques de Navier et de Levy offrent des solutions précises mais sont limitées dans leur application à des géométries simples et des conditions aux limites standardisées. Les méthodes numériques, en revanche, sont plus flexibles et peuvent traiter des situations plus

complexes, mais elles requièrent des ressources computationnelles importantes et des validations rigoureuses [3].

Ce travail a pour objectif principal d'Analyser la déformation d'une plaque rectangulaire à travers les méthodes analytiques (Navier et Levy) et les méthodes numériques entre autres la méthode de différences finies et la méthode des éléments finies.

Face au problème identifié, une question se pose : Les 4 approches donnent - t- elles les mêmes résultats pour l'analyse d'une plaque rectangulaire ? Cette question soulève les questions spécifiques suivantes :

1. Quelle est la démarche ou principe à suivre pour analyser la déformée d'une plaque rectangulaire dans chacune de ces 4 approches ?
2. Existe-il une comparaison entre les méthodes analytiques (Navier et Lévy) et numériques (MDF &MEF) du point de vue résultats dans l'analyse de la déformation d'une plaque rectangulaire ?

Pour répondre aux interrogations posées dans cette partie précédente, nous avançons les hypothèses suivantes :

- Chaque méthode (Navier, Lévy, MDF, MEF) aurait une démarche propre, mais elles pourraient toutes aboutir à une analyse précise de la déformation, adaptée selon les conditions de la plaque.
- Les méthodes numériques pourraient offrir des résultats plus précis pour des conditions complexes, tandis que les méthodes analytiques seraient plus directes dans des cas simples [3, 2].

Pour réaliser notre projet dans sa totalité, nous poursuivons les objectifs spécifiques suivants :

- Identifier les étapes clés et les principes sous-jacents dans chacune des méthodes (analytique et numérique) pour proposer un cadre méthodologique complet qui permettrait d'analyser la déformation d'une plaque rectangulaire.

- Comparer les résultats obtenus avec les méthodes analytiques et numériques en termes de précision et d'applicabilité selon les conditions aux limites et Dégager les points de comparaisons dans des tableaux en se basant sur les résultats d'analyses avec des cas d'études précis.

Comme de justification, *Notre travail contribue directement à l'amélioration des pratiques de conception et de construction, permettant aux ingénieurs civils de prendre des décisions éclairées et de concevoir des structures plus sûres et plus durables.*

En outre, sur le plan académique, ce travail enrichira la littérature existante et fournira des ressources précieuses pour les chercheurs et les étudiants en génie civil. Il offrira une base solide pour de futures recherches et développements dans l'analyse des déformations structurelles.

Dans le cadre de cette étude, il sera essentiel de commencer par effectuer une recherche documentaire afin de collecter toutes les informations requises concernant ces quatre méthodes d'analyse d'une plaque.

Un aperçu de la littérature sur la théorie de la déformation des plaques sera exposé. Le but ici est d'appréhender les équations différentielles partielles qui régissent la déformation. Dans cette analyse, nous examinerons les techniques de calcul des plaques, ainsi que les conditions de limite et les différents types de charges utilisés. La réalisation de cette étape établira une fondation théorique solide pour les résolutions futures.

Une fois cette étape préparatoire terminée, nous procéderons à la résolution de l'équation de la déformée d'une plaque rectangulaire en utilisant les quatre méthodes suivantes : les méthodes analytiques de Navier et Levy, ainsi que les méthodes numériques de la méthode des éléments finis (FEM) et des différences. Les solutions obtenues seront exposées pour chaque approche.

Par la suite, des logiciels de programmation comme MATLAB seront employés afin de calculer et de visualiser les résultats, ce qui facilitera l'analyse et l'interprétation des données. En même temps, une simulation sera effectuée dans Abaqus pour la méthode des éléments finis, ce qui permettra d'évaluer de manière précise les déformations de la plaque dans différents scénarios

de chargement. Enfin, une comparaison sera réalisée en examinant les résultats obtenus à l'aide des méthodes analytiques et numériques.

Face à la complexité du champ d'étude des plaques, le présent travail se restreint à l'analyse des plaques minces rectangulaires. Notre démarche s'appuie ainsi sur la théorie de Love Kirchhoff, en considérant les hypothèses simplificatrices qui fondent cette approche théorique. Cependant, il est important de noter que ces hypothèses peuvent limiter la portée des résultats et qu'il peut être nécessaire de les relâcher pour certains types de problèmes

En plus de l'introduction générale, ce travail est subdivisé en trois chapitres :

Le chapitre initial a abordé les généralités sur les plaques, laquelle présentation indiquera la classification des plaques, les différentes théories des plaques, les hypothèses d'études des plaques, les forces et moments résultant, l'équation gouvernante de la flexion des plaques, les méthodes d'analyses des problèmes de flexion des plaques.

Le chapitre suivant s'est concentré uniquement sur la présentation de la méthodologie.

Dans le troisième chapitre, une étude comparative des résultats des 4 approches d'analyses appliqués à un cas d'étude concret est présentée.

Une conclusion sera ensuite exposée qui va réitérer les points les plus importants de l'étude ci-présente, suivie d'une liste de bibliographie et enfin des annexes pour clôturer ce mémoire.

Chapitre 1 Généralités sur les plaques

1.1 Introduction

Les plaques jouent un rôle central dans la mécanique des structures, notamment dans les domaines du génie civil, de l'aéronautique et de l'ingénierie navale. Une plaque est définie comme un élément structural tridimensionnel de faible épaisseur par rapport à ses autres dimensions, souvent utilisé pour supporter des charges perpendiculaires à son plan [9]. L'étude de leur comportement sous diverses sollicitations est donc essentielle pour garantir la sécurité et la stabilité des constructions qui en dépendent.

La théorie des plaques a évolué au fil des siècles grâce aux contributions de plusieurs scientifiques et ingénieurs éminents. Cette évolution historique commence avec les travaux de Leonard Euler au XVIII^e siècle, suivis par ceux de Joseph-Louis Lagrange et Claude-Louis Navier, qui ont posé les fondements mathématiques de l'analyse des plaques en introduisant des équations différentielles du quatrième ordre. Ces travaux ont été enrichis par des théories plus avancées, telles que celles développées par Kirchhoff et Love, qui ont permis de mieux comprendre le comportement des plaques minces et épaisses. Ces théories reposent sur des hypothèses simplificatrices visant à modéliser la réponse des plaques de manière plus précise tout en réduisant la complexité des calculs [10].

Dans ce chapitre, nous explorerons les principales caractéristiques des plaques, leur classification ainsi que les théories fondamentales qui régissent leur comportement. Une attention particulière sera portée à la théorie de la flexion des plaques minces de Kirchhoff-Love, applicable lorsque le rapport entre l'épaisseur de la plaque et ses autres dimensions est faible. Cette théorie est souvent utilisée en génie civil en raison de sa simplicité et de sa capacité à fournir des solutions approximatives acceptables pour de nombreuses applications pratiques.

De plus, nous discuterons des différents types de déflexions que peuvent subir les plaques sous l'effet des charges, ainsi que des équations d'équilibre nécessaires pour déterminer les contraintes et les déformations associées. Nous aborderons également les conditions aux limites couramment appliquées, telles que les bords encastrés, simplement appuyés ou libres, qui influencent fortement la réponse mécanique des plaques.

Enfin, ce chapitre examinera les méthodes d'analyse traditionnelles et modernes employées pour résoudre les problèmes de plaques. Les méthodes analytiques classiques, comme celles de Navier et Levy, permettent d'obtenir des solutions exactes dans des configurations spécifiques mais sont souvent limitées par les conditions aux limites imposées. En parallèle, les méthodes numériques, notamment la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des différences finies (MDF), offrent des solutions plus flexibles et sont capables de traiter des plaques de formes complexes avec des matériaux et conditions aux limites variés [3]. Ces méthodes numériques sont devenues essentielles dans l'ingénierie moderne pour l'analyse des structures complexes.

Ce chapitre pose ainsi les bases théoriques nécessaires pour comprendre la déformation des plaques et préparer l'application des méthodes analytiques et numériques qui seront développées dans les chapitres suivants.

1.2 Généralité sur les plaques

Il existe différentes configurations de plaques. Dans la littérature, les plaques sont très souvent classées selon leur géométrie (plaque rectangulaire, circulaire), selon les sollicitations subies (charges ponctuelles, réparties), mais également selon leur comportement type (membrane, flexion) et la prise en compte ou non du cisaillement transverse. Pour ce dernier aspect, on distingue les plaques sans cisaillement (souvent minces et homogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Love-Kirchhoff, et les plaques prenant en compte le cisaillement (souvent épaisses et/ou hétérogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Hencky- Mindlin [9].

1.3 Les déformations des plaques

Les déformations des plaques se réfèrent aux déplacements de leur plan moyen perpendiculairement à leurs plans inférieurs et supérieurs causés par l'action de forces et de moments extérieurs (voir [Figure 1-1](#)). La quantité de ces déformations peut être déterminée en résolvant les équations différentielles appropriées à la plaque étudiée. Les contraintes dans la plaque peuvent être calculées à partir de ces déflexions et une fois les contraintes sont connues, les théories de rupture peuvent être utilisées pour déterminer si une plaque en mesure de supporter les charges agissant sur elle [9].

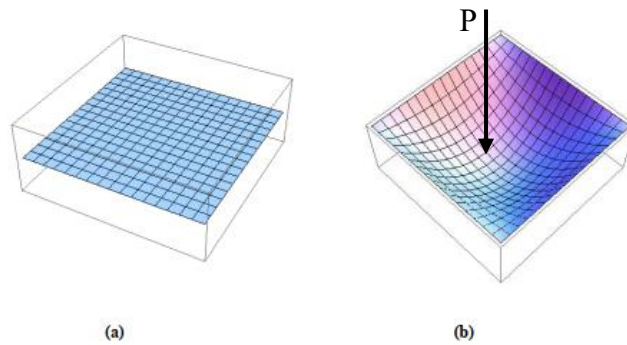


Figure 1-1 : Schéma d'une plaque mince avant et après déformation : (a) avant déformation (b) après déformation [9]

1.4 Définition et classification des plaques

La plaque est une structure tridimensionnelle solide ou flexible limitée par deux plans parallèles (les faces de la plaque) et par un bord perpendiculaire aux faces qui est l'épaisseur de la plaque. L'épaisseur de la plaque est définie comme étant la distance entre ses faces. L'épaisseur de la plaque notée généralement par le symbole « h » est supposée petite devant ses autres dimensions qui représentent sa longueur et sa largeur [9].

Les plaques comprennent généralement un plan moyen. Le plan moyen (ou « plan médian », ou « feuillet neutre ») est le plan situé à équidistance entre le plan inférieur et le plan supérieur de la plaque d'équation $z = 0$ (équivalent de la ligne moyenne des poutres) (Voir [Figure 1-2](#)).

Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur.

En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc. Si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la plaque sont différentes selon les directions, la plaque est dite anisotrope [13].

Les plaques peuvent être classées en trois groupes : les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses à déformations négligeables. Le critère souvent utilisé pour définir une plaque mince est le rapport entre l'épaisseur « h » et la plus petite dimension transversale [10, 11, 12].

- La théorie de Kirchhoff relative aux plaques minces, est applicable lorsque ce rapport est inférieur à dépasser $1/20$: $h/b < 1/20$
- La théorie de Henky-Mindlin relative aux plaques épaisses s'applique quand les rapports dimensions-épaisseur sont compris entre 4 et 20 ($4 \leq b/h \leq 20$).

Où b : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y) : c'est la plus petite dimension transversale ; h : est l'épaisseur de la plaque ; b/h : est le facteur d'élanement de la plaque.

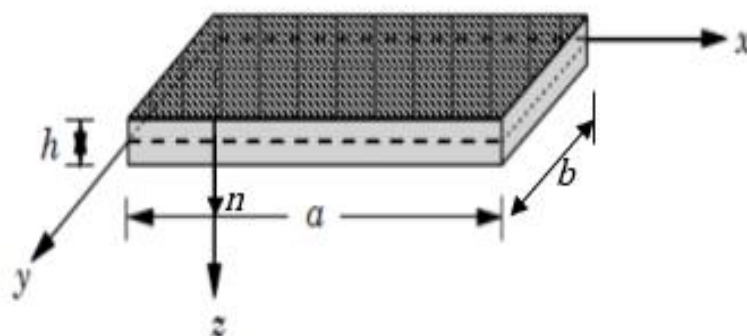


Figure 1-2 Description géométrique d'une plaque [13]

1.5 Comportement générale des plaques

Considérons la plaque non chargée (voir *Figure 1-3* (a)) pour laquelle le plan xy coïncide avec le plan moyen et donc la flèche suivant z est égale à zéro. Les composantes du déplacement en un point, suivant les directions x, y et z , sont dénotées u, v et w , respectivement. Quand une charge latérale engendre une déformation de la plaque, la surface médiane en un point $A(x_a, y_a)$ présente un déplacement w (Voir *Figure 1-3*(b)).

Les hypothèses fondamentales de la théorie de flexion avec petites déformations des plaques minces, isotropes, homogènes et élastiques sont basées sur la géométrie des déformations. Ces hypothèses peuvent s'énoncer comme suit [14]:

1. La flèche de la surface médiane w est très faible par rapport à l'épaisseur de la plaque h . La pente de la surface fléchie est par conséquent très petite et le carré de la pente est une quantité négligeable devant l'unité.
2. Le plan moyen reste indéformé pendant la flexion : $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$
3. Une section de la plaque normale à son plan moyen reste plane après déformation. Cela veut dire que les déformations de cisaillement vertical γ_{xz} et γ_{yz} sont négligeables. Il est aussi déduit que la déformation normale ε_z résultant des charges transversales peut être omise.
4. La contrainte normale σ_z , sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

Les hypothèses ci-haut, connue comme les *hypothèses de Kirchhoff* sont analogues à celles associée à la théorie de flexion des poutres. Leur validité a été démontrée à travers des essais à petite et à grande échelle. Dans la majorité des applications en ingénierie, des justifications adéquates peuvent être trouvées par rapport aux simplifications liées à l'état des contraintes et des déformations. Les simplifications, un problème tridimensionnel de plaque peut être réduit à un problème à deux dimensions uniquement. En conséquence, les équations gouvernantes de la flexion des plaques peuvent être écrites de manière concise et simple. Quand les

déformations ne sont pas petites, la flexion des plaques s'accompagne d'une déformation dans le plan médian, et les hypothèses 1 et 2 ne sont pas applicables [10].

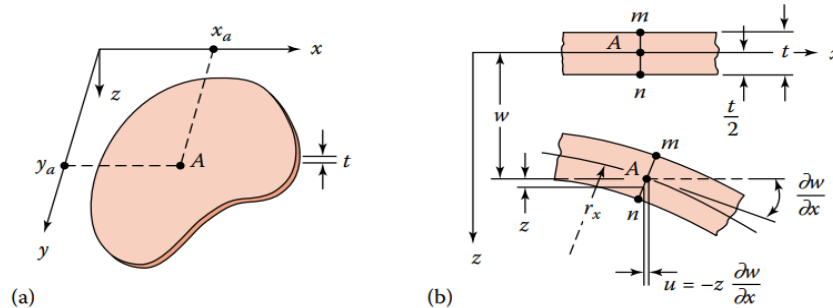


Figure 1-3 : (a) Une plaque d'épaisseur constante ; (b) une partie de la plaque avant et après déformation [10].

1.6 Champs des déformation-Relations cinématiques

Pour mieux comprendre le problème de flexion des plaques, nous allons maintenant considérer la géométrie de la déformation. En conséquence de l'hypothèse 3 de la section précédente, les relations déformation-déplacement, sont données par [15] :

$$\begin{aligned}
 \begin{aligned}
 \blacksquare \quad \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \blacksquare \quad \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\
 \blacksquare \quad \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0
 \end{aligned}
 \end{aligned}
 \tag{1.1a-f}$$

Où $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}(i, j = x, y, z)$. Notez que ces expressions sont également appelées relations cinématique, traitant de la géométrie de la déformation plutôt que de la question de la cause et de l'effet. En intégrant l'équation 1.1d, nous obtenons ;

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y) \tag{1.2}$$

Indiquant que la déformation latérale ne varie pas en fonction de l'épaisseur de la plaque. De la même manière, l'intégration des expressions pour γ_{xz} et γ_{yz} donne :

$$\mathbf{u} = -z \frac{\partial w}{\partial x} + \mathbf{u}_0(x, y) \quad \mathbf{v} = -z \frac{\partial w}{\partial y} + \mathbf{v}_0(x, y) \quad (1.3)$$

Il est clair que $u_0(x, y)$ et $v_0(x, y)$ représentent respectivement les valeurs de u et v sur le plan médian. Sur la base de l'hypothèse 2 de la section 1.5, nous concluons que $u_0 = v_0 = 0$. Ainsi,

$$\mathbf{u} = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \mathbf{v} = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.4)$$

L'expression ci-dessus pour u est représentée sur la *Figure 1-3(b)* à la section **m-n** passant par un point arbitraire $A(x, y)$. Une illustration similaire s'applique pour v dans le plan zy . Nous voyons que les équations (1.4) sont cohérentes avec l'hypothèse 3. La substitution des équations (1.4) dans les trois premières expressions des équations (1.1) donne :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

Ces formules fournissent les déformations à n'importe quel point de la plaque.

1.7 Champs des Contraintes et résultantes de contraintes

Dans le cas général d'un état des contraintes tridimensionnelles, les contraintes et les déformations sont liées par la loi de Hooke généralisée, valable pour un matériau homogène isotrope et sont données [14, 16] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Où $\tau_{ij} = \tau_{ij}(i, j = x, y, z)$. les constantes E, ν et G représentent respectivement le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et le module d'élasticité de cisaillement.

La relation entre ces éléments est donnée par l'expression suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.6a)$$

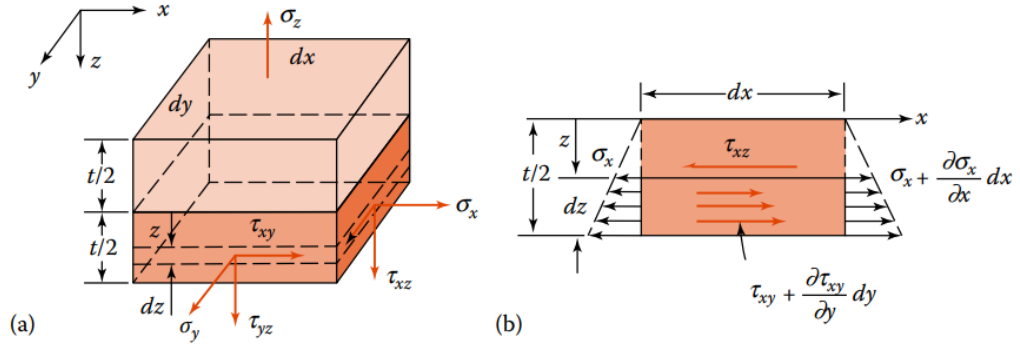


Figure 1-4 : Contraintes dans la moitié inférieure et contrainte normale au plan médian d'un élément de plaque [10, 15].

En considérant que $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, les relations contrainte-déformation pour une plaque mince s'écrivent [15].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.7)$$

En considérant les relations cinématiques, les contraintes peuvent alors s'écrire comme suit ;

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nous observons à partir de ces formules que les contraintes s'annulent à la surface médiane et varient linéairement sur l'épaisseur de la plaque. Les contraintes réparties sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, des moments de torsion et des efforts de cisaillement verticaux [10]. Se référant à la [Figure 1-4\(a\)](#), nous avons :

$$\int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x dy dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x dz = M_x dy \quad (1.9)$$

De même, les expressions des autres résultantes sont dérivées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (1.9a)$$

Avec $M_{xy} = M_{yx}$; De même :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} z dz \quad (1.9b)$$

Tous les moments et forces de cisaillement agissant sur l'élément à la [Figure 1-5](#) sont positifs [15].

Il est important de mentionner que même si la théorie des plaques minces omet l'effet des composantes de contrainte $\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$ et $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$ en flexion, les forces verticales Q_x et Q_y ne sont pas négligeables. En fait, ils sont du même ordre de grandeur que les charges et les moments de surface et sont inclus dans la dérivation des équations d'équilibre (Voir section 1.8).

En remplaçant les équations (1.8) dans l'équation (1.9a), nous déduisons les formules suivantes pour les moments de flexion et de torsion en fonction de la déformation [17] :

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Le paramètre D étant la rigidité flexionnelle de la plaque.

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.11)$$

Les composantes de contraintes peuvent s'écrire en fonction des moments de la manière suivante [4, 10]:

$$\sigma_x = \frac{12M_{xz}}{t^3} \quad \sigma_y = \frac{12M_{yz}}{t^3} \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xyz}}{t^3} \quad (1.12)$$

Le maximum des contraintes se produisent sur les surfaces inférieures et supérieures (à $z = \pm t/2$) de la plaque [10].

1.8 Equations d'équilibre d'une plaque

Les composantes de contrainte (et donc les résultantes de contrainte) varient généralement d'un point à un autre d'une plaque chargée. Ces variations sont régies par les conditions d'équilibre de statique. La réalisation de ces conditions conduit à l'établissement de certaines relations connues sous le nom d'équations d'équilibre. Nous réduirons par la suite ce dernier système d'équations à une seule relation exprimée en termes de moments [15].

Considérons un élément $dx dy$ de la plaque soumise à une charge uniformément répartie par unité de surface p (Figure 1-5). Nous supposons que l'inclusion du poids de la plaque, une petite quantité, dans la charge p ne peut pas affecter la précision du résultat. Notez également que, comme l'élément est très petit, par souci de simplicité, les composantes de force et de moment peuvent être considérées comme étant uniformément réparties sur chaque face. Dans la figure, elles sont représentées par un seul vecteur, représentant les valeurs moyennes appliquées au centre de chaque face [10].

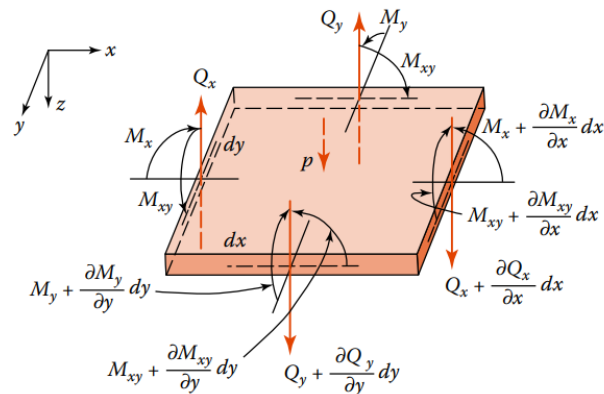


Figure 1-5 : Résultantes de contraintes positives et charge sur un élément de plaque [11].

La condition selon laquelle la somme des forces dirigées vers z sont égales à zéro, conduit à [10, 15]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (1.13)$$

Ce qui se traduit par ;

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1.14)$$

L'équilibre des moments autour de l'axe x s'écrit [10]:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (1.15)$$

Ce qui donne ;

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1.16)$$

Dans ces expressions, le produit des quantités infinitésimales, comme le moment dû à p et le moment due à la variation de Q_y sont omis.

De la même manière, à partir de l'équilibre des moments autour de l'axe y , nous avons

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (1.17)$$

Finalement, en introduisant les expressions de Q_x et Q_y nous obtenons

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (1.18)$$

C'est *l'équation différentielle d'équilibre* pour la flexion de plaques minces.

Les expressions des forces de cisaillement peuvent alors s'écrire en fonction de la flèche w , en se basant sur les équations (1.16) et (1.17) [10, 18] :

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Où ∇^2 est l'Opérateur de Laplace :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.20)$$

Remarque : On a trois équations d'équilibre pour cinq grandeurs inconnues ($Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$): le problème est hyperstatique et pour lever l'indétermination il faut tenir compte des déformations [4].

1.9 Équation gouvernante de la flexion des plaques

L'équation différentielle qui gouverne la flexion des plaques peut être obtenue en utilisant les résultats des sections précédentes. Introduisons les expressions de M_x, M_y et M_{xy} dans l'équation (1.18), nous obtenons [2, 10, 14, 15, 17] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1.21a)$$

Cette équation, dérivée pour la première fois par Lagrange en 1811, peut également s'écrire sous une forme concise :

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D} \quad (1.21b)$$

Dans lequel $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\nabla^2)^2$.

Lorsqu'aucune charge latérale n'agit sur la plaque :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (1.22)$$

Les expressions (1.21) sont les équations différentielles régissant la flexion de plaques minces. Pour déterminer w , il est nécessaire d'intégrer cette équation avec les constantes d'intégration dépendant des conditions limites appropriées (discutées dans la section 1.10).

1.9.1 Réduction de l'ordre du problème de flexion de la plaque

Il est intéressant de souligner que la somme des composantes du moment de flexion, comme définie dans les équations 1.10, reste constante. En d'autres termes [10]:

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D(1 + \nu) \nabla^2 w \quad (1.23a)$$

En désignant M comme la fonction du moment, aussi appelée la somme des moments ;

$$M = \frac{M_x + M_y}{(1 + \nu)} = -D \nabla^2 w \quad (1.23b)$$

Les expressions pour les forces de cisaillement peuvent être formulées ainsi :

$$Q_x = \frac{\partial M}{\partial x} ; \quad Q_y = \frac{\partial M}{\partial y} \quad (1.24)$$

L'équation 1.21, peut-être représenté de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \quad (1.26)$$

L'équation de la plaque, $\nabla^4 w = p/D$, est ainsi réduite à deux équations différentielles partielles d'ordre deux, qui sont parfois préférées en fonction de la méthode de résolution utilisée. En connaissant la charge et les conditions aux limites, on peut résoudre M à partir de l'Équation 1.25, puis l'Équation 1.26 donne w .

1.10 Conditions aux limites

L'équation différentielle de la surface élastique admet une infinité de solutions. La solution réelle d'un problème donné sera celle qui remplit les conditions au contour [4].

Considérons une plaque rectangulaire et étudions les différentes situations les plus fréquemment rencontrées [10, 15]:

1.10.1 Bord encastré

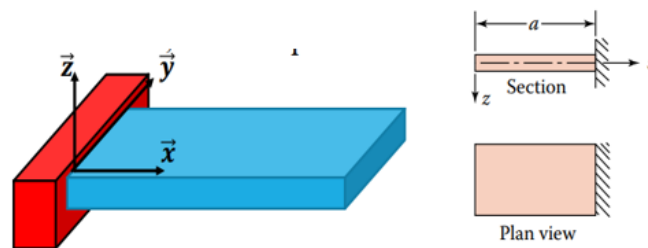


Figure 1-6 : Schéma d'une plaque avec bord encastré [10, 19]

Si le bord d'une plaque est encastré, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent à la surface moyenne fléchie, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. La rotation est donc nulle le long de ce bord.

Si le bord $x = a$ est encastré, les conditions aux limites sont formulées comme suit :

$$w(a, y) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.27)$$

1.10.2 Bord simplement appuyé

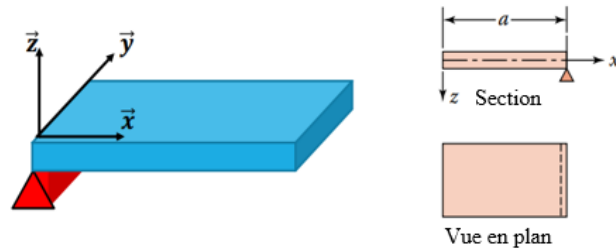


Figure 1-7 Schéma d'une plaque avec bord simplement appuyé [10, 19]

En plus, ce bord peut tourner librement autour de l'axe. Si le bord $x = a$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche le long de ce bord est nulle autour de l'axe x , c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion M_x le long de ce bord. Comme la flèche w est identiquement nulle le long du côté, ses dérivées en y le sont également et l'on a les conditions suivantes :

$$w(a, y) = 0 \quad ; \quad M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.28)$$

1.10.3 Bord libre

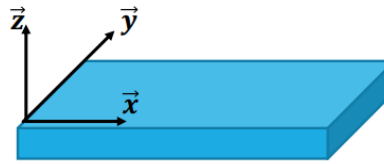


Figure 1-8 Schéma d'une plaque avec bord libre [19]

Sous la forme proposée par Poisson, les conditions aux limites pour ce cas stipulent que le moment de flexion M_x doit être nul. L'effort tranchant Q_x et le moment de torsion M_{xy} devraient l'être aussi. Kirchhoff trouva que ces trois conditions étaient de trop et que deux suffisaient pour déterminer complètement la flèche w . Il a démontré que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion M_{xy} et à l'effort tranchant Q_x pouvaient être remplacées par une seule condition aux limites (exprimant l'annulation de la réaction totale).

$$M_x = 0 \quad ; \quad V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (x = a) \quad (1.29)$$

Ce qui peut s'écrire en fonction des dérivées partielles de la flèche w comme suit :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (x = a) \quad (1.30)$$

1.10.4 Bord glissant

Dans ce cas, le bord est libre de se déplacer verticalement, mais la rotation y est empêchée (Figure 1-9). Le support n'est capable de résister à un effort tranchant. Ainsi :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (x = a) \quad (1.31)$$

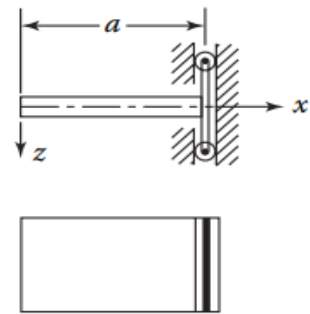


Figure 1-9 Schéma bord glissant [16]

1.11 Théorie exacte des plaques

Rappelons que dans le cadre de la théorie de flexion des poutres, l'effet de l'effort tranchant sur les déformations et les contraintes est relativement insignifiant et peut être négligé si la hauteur de la poutre est petite comparée à sa portée. Cette même conclusion est valable dans le cas des plaques. Cependant, il est important de noter que dans les problèmes de vibration et de propagation des ondes, l'effet du cisaillement est d'une grande importance pour les poutres et les plaques qu'elles soient élancées ou pas [10].

La théorie exacte des plaques est exclusivement gouvernée par la théorie de l'élasticité [20]. Dans le cas d'une flexion de plaque engendrant un état de contrainte plane, la solution générale

issue de la théorie exacte des plaques coïncide avec la solution obtenue par la théorie classique des plaques [4].

La résolution rigoureuse d'autres configurations indique que la théorie classique des plaques mince est suffisamment précise pour les cas usuels rencontrés en pratique, avec les exceptions suivantes : Dans la proximité d'importantes charges concentrées ; Dans des zones limitées des bords, particulièrement à proximité des coins des plaques et autour des ouvertures [10].

1.12 Méthode d'analyse des problèmes de plaques

L'analyse statique ou dynamique des poutres, plaques et coques en interaction avec des milieux élastiques repose sur diverses méthodes de résolution [9]. Ces méthodes proviennent du développement d'approches anciennes, tout en intégrant des techniques récentes pour pallier les insuffisances des méthodes existantes et surmonter les défis rencontrés lors de leur application. Dans un contexte de recherche d'une analyse plus précise, rationnelle et réaliste, il est crucial de développer les méthodes existantes ou de proposer de nouvelles approches.

Bien que des hypothèses soient adoptées et des exigences soient imposées, certaines simplifications sont inévitables pour formuler les équations mathématiques nécessaires, permettant ainsi l'obtention de solutions réalisables. Deux types de résolution se distinguent : la résolution analytique, généralement limitée, et la résolution approximative.

1.12.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques sont privilégiées pour leur capacité à fournir des solutions exactes et proches de la réalité exprimée par le modèle approprié. Cependant, elles présentent souvent des limitations en raison de leur difficulté d'application à des structures de formes complexes ou constituées de matériaux non homogènes. Des hypothèses simplificatrices sont donc requises. Un autre type de méthodes, appelées analytiques approximatives ou méthodes semi-analytiques, a émergé pour surmonter ces limitations. Ces méthodes offrent des avantages significatifs en présentant généralement la réponse du problème étudié sous forme d'une série convergente vers la solution exacte [1, 2, 9, 10].

Dans ce mémoire, les méthodes analytiques spécifiques que nous utiliserons incluent **la méthode de Navier** et **la méthode de Levy**, qui sont particulièrement adaptées pour traiter des plaques rectangulaires sous différentes conditions de charge.

1.12.2 Méthodes numériques :

Les méthodes numériques sont indispensables pour résoudre des problèmes complexes lorsque la solution analytique ou semi-analytique fait défaut [9]. Les méthodes numériques sont largement utilisées dans les domaines de l'ingénierie et de la physique, notamment [21]:

- La méthode des différences finies, qui permet de discrétiser les équations différentielles et de résoudre numériquement les problèmes d'élasticité.
- La méthode des éléments finis, qui décompose un domaine complexe en éléments simples et permet une analyse locale précise.
- La méthode des éléments aux frontières, qui réduit la dimension du problème en se concentrant sur les frontières des domaines.
- La méthode des volumes finis, qui est particulièrement utile pour la conservation des flux dans les équations de transport.

Dans le cadre de cette étude, nous allons utiliser **la méthode des différences finies** et **la méthode des éléments finis**, qui sont largement reconnues pour leur efficacité dans la modélisation et l'analyse des plaques.

1.13 Conclusion

Ce premier chapitre a fourni une base solide sur les généralités des plaques, abordant à la fois leur histoire, leur classification et leur comportement mécanique. Nous avons examiné l'évolution de la théorie des plaques, en soulignant les contributions des pionniers tels qu'Euler et Kirchhoff, qui ont établi les fondements mathématiques nécessaires à l'analyse des structures en plaques.

La distinction entre les différents types de plaques, qu'elles soient minces ou épaisses, isotropes ou anisotropes, est essentielle pour comprendre les méthodes d'analyse qui seront discutées

ultérieurement. Les sections sur les déflexions et les champs de contraintes ont mis en évidence les enjeux liés à la sécurité et à la performance des structures en plaques, qui sont omniprésentes dans le génie civil.

De plus, l'introduction des méthodes analytiques et numériques a montré que, bien que les solutions exactes puissent être obtenues pour des cas simples, les méthodes numériques sont indispensables pour traiter des configurations complexes et variées. Cela souligne l'importance d'une approche méthodologique diversifiée pour une analyse rigoureuse des déformations des plaques.

Ainsi, ce chapitre a non seulement établi un cadre théorique essentiel, mais a également préparé le terrain pour les analyses plus approfondies qui suivront. La connaissance des généralités sur les plaques est un préalable incontournable pour aborder les défis pratiques que rencontrent les ingénieurs dans la conception et l'analyse des structures modernes.

Chapitre 2 Méthodologie

2.1 Introduction

Dans le cadre de ce mémoire, l'analyse de la déformation d'une plaque rectangulaire repose sur une approche combinant des méthodes analytiques et numériques. Cette approche méthodologique vise à comparer les outils théoriques et computationnels disponibles pour étudier les équations régissant la flexion des plaques. Les méthodes analytiques permettent de déterminer des solutions exactes ou semi-exactes sous certaines hypothèses simplificatrices, tandis que les méthodes numériques offrent une flexibilité indispensable pour traiter des configurations complexes, souvent inaccessibles aux solutions analytiques [2, 3].

Ce chapitre présente d'abord les méthodes analytiques, en mettant l'accent sur les méthodes de Navier et de Levy, qui s'appliquent spécifiquement aux plaques rectangulaires avec des conditions aux limites bien définies. Ensuite, les méthodes numériques — la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis — sont abordées. Ces deux approches se complètent en offrant des outils puissants pour des cas où les méthodes analytiques montrent leurs limites. On présente aussi brièvement le logiciel Abaqus, un logiciel de simulation pour la méthode des éléments finis.

Ainsi, ce chapitre établit un cadre rigoureux pour l'étude des plaques rectangulaires, en définissant les bases théoriques et les modalités pratiques de chaque méthode utilisée

2.2 Méthodes analytiques

2.2.1 Introduction

Les méthodes analytiques sont historiquement les premières approches utilisées pour résoudre les équations de flexion des plaques. Ces méthodes reposent sur la recherche de solutions exactes en satisfaisant les conditions aux limites par des développements en séries. Bien

qu'elles soient limitées à des cas géométriques simples et à des conditions aux limites idéalisées, elles offrent une précision incomparable dans ces contextes.

Dans ce mémoire, deux méthodes analytiques sont examinées : la méthode de Navier et la méthode de Levy. Ces approches permettent d'obtenir des expressions analytiques précises pour la déflexion des plaques, servant également de référence pour valider les résultats des méthodes numériques.

2.2.2 Méthode de Navier (Solution par des séries doubles)

En 1820, Navier présenta un papier à l'Académie Française des Sciences où il propose une solution au problème de flexion des plaques rectangulaires simplement appuyées en utilisant une double série trigonométrique [21].

2.2.2.1 Présentation du problème

Considérons une plaque rectangulaire de côtés a et b , simplement appuyée sur son contour et soumise à une charge uniformément répartie $p(x, y)$. L'origine du système de coordonnées étant placée à l'extrémité supérieure gauche de la plaque comme montré à la [Figure 2-1](#) ci-dessous [10] :

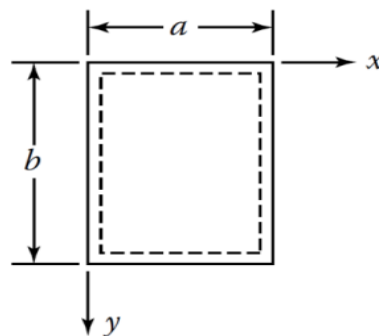


Figure 2-1 Localisation du système de coordonnées pour la méthode de Navier [10]

Les conditions de bords (Conditions aux limites) pour une plaque simplement appuyée sont données à l'équation 1.25 :

$$w = 0|_{x=0,a} ; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0|_{x=0,a} \quad (2.1)$$

$$w = 0|_{y=0,b} ; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0|_{y=0,b}$$

Selon Navier, la solution de l'équation différentielle gouvernante (2.21), c.-à-d., l'expression de la flèche $w(x, y)$ et de la distribution de la charge surfacique $p(x, y)$ doivent être vu sous la forme d'une série de Fourier infinie, comme suit [2, 15, 23, 10, 24]:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.2)$$

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.3)$$

Ici A_{mn} et P_{mn} représentent des coefficients à déterminer pour que les équations (2.2) et (2.3) satisfassent aux conditions aux limites données par les équations (2.1).

Il est facile de vérifier que l'expression de la flèche donnée dans l'équation 1.21 vérifie les conditions aux limites définies par les équations (2.1).

2.2.2.2 Calcul des coefficients A_{mn} et P_{mn}

D'après la méthode des séries de Fourier [21, 22] ;

Posons $W(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} w_{mn}$ Avec $w_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$

Définissons le bilaplacien :

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (2.4)$$

Sous forme d'une série infinie de Fourier le bilaplacien s'écrit aussi :

$$\nabla^4 w(x, y) = \nabla^4 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} w_{mn} \quad (2.5a)$$

Le Bilaplacien étant un operateur linéaire on a :

$$\nabla^4 w(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \nabla^4 w_{mn} \quad (2.5b)$$

Avec

$$\nabla^4 w_{mn} = \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4} \quad (2.5c)$$

Explicitons le bilaplacien en calculant : $\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4}$

$$w_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6)$$

En dérivant (2.6) 4 fois successives, on trouve :

$$\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} = \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6a)$$

De meme:

$$\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4} = \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6b)$$

En plus :

$$\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6c)$$

En injectant (2.6a-c) dans (2.5c), On trouve :

$$\nabla^4 w_{mn} = \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.7a)$$

En posant :

$$\lambda = \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.7b)$$

L'équation (2.7a) devient :

$$\nabla^4 w_{mn} = \lambda \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \lambda w_{mn} \quad (2.7c)$$

L'équation (2.7c) dans (2.5b) on trouve :

$$\nabla^4 w(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda A_{mn} w_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn} w_{mn} \quad (2.8a)$$

Avec :

$$B_{mn} = \lambda A_{mn} \quad (2.8b)$$

L'équation gouvernante (1.21) peut maintenant s'écrire comme suit :

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn} w_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.9)$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} B_{mn} = \frac{P_{mn}}{D} \\ w_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{cases} \quad (2.10)$$

On s'intéresse à la première équation du système (2.10) on a : $B_{mn} = \lambda A_{mn} = \frac{P_{mn}}{D}$

Ce qui donne :

$$A_{mn} = \frac{P_{mn}}{\lambda D} \quad (2.11a)$$

En remplaçant (2.7b), dans (2.11a) on obtient la valeur de A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{P_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.11b)$$

Connaissant la valeur de A_{mn} , l'équation (2.2) peut désormais s'écrire :

$$w(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.12)$$

Maintenant cherchons la valeur de P_{mn} :

D'après l'équation (2.3) ; $P(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ (cas d'un chargement sinusoïdal). Conformément à la méthode de Fourier, multiplions les deux membres par $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy$ et intégrons les deux membres entre les limites $0 \rightarrow a$ et $0 \rightarrow b$. on a :

$$\int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dy dx = \int_0^a \int_0^b \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dy dx$$

$$\int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dy dx = P_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy \quad (2.13a)$$

Il est possible de vérifier que (en annexes Démo 1) :

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k \\ \frac{a}{2} & \text{si } m = k \end{cases} \\ \bullet \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq l \\ \frac{b}{2} & \text{si } n = l \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Remarquons que $m = k; n = l$ Sont les seuls cas où le second membre n'est pas nulle

L'équation (2.13a) devient :

$$\int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx = P_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$\int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dy dx = P_{mn} \frac{a}{2} \frac{b}{2}$$

On tire la valeur de P_{mn} :

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx \quad (2.14)$$

Avec les valeurs de A_{mn} et P_{mn} On peut alors écrire la solution générale de la flèche w :

$$w(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.15)$$

En substituant $w(x, y)$ dans les expressions des moments internes et des efforts tranchants données par les équations (1.10), et (1.19), les forces internes ainsi que l'état de contrainte à n'importe quel point de la plaque peuvent être déterminés. Par exemple, pour les moments dans la plaque, nous obtenons [14]:

$$m_x = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$m_y = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$m_{xy} = -\pi^2 D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.16)$$

Pour les efforts tranchants dans la plaque :

$$\begin{aligned}
 q_x &= \frac{\pi^3 D}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m \left[\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} + (1 - \nu) \frac{n^2}{b^2} \right] w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 q_y &= \frac{\pi^3 D}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} + (1 - \nu) \frac{m^2}{a^2} \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

2.2.2.3 Plaque simplement appuyée sur quatre bords soumise à une charge uniformément répartie

Lorsqu'une plaque rectangulaire est soumise à une charge donnée, le résultant de l'équation 2.14 donnant la valeur de p_{mn} trouvé précédemment est considérablement simplifié, ce qui simplifie à son tour l'équation 2.15 représentant la solution générale de la déformation de la plaque [10].

On peut distinguer plusieurs types de chargement [15]:

- Cas d'une plaque soumise à une charge uniformément répartie
- Cas d'une plaque soumise à charge sinusoïdale
- Cas d'une plaque soumise à charge hydrostatique
- Cas d'une plaque soumise à une charge concentrée à un point de la plaque
- Cas d'une plaque soumise à une charge linéaire, triangulaire, etc.

Par exemple, En considérant le Cas d'une plaque soumise à une charge uniformément répartie [13, 22]:

$$P(x, y) = P_0 = c^{te} \quad (2.18)$$

Ramenons (2.18) dans (2.14); on a :

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx = \frac{4P_0}{ab} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (2.19)$$

En intégrant on a :

$$P_{mn} = \frac{4P_0}{ab} \left(\frac{a}{m\pi} (\cos m\pi - 1) \frac{b}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ ou } n \text{ est pair} \\ \frac{16P_0}{mn\pi^2} & \text{Si } m \text{ et } n \text{ sont impairs} \end{cases}$$

$$P_{mn} = \frac{16P_0}{mn\pi^2}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.20)$$

D'où pour un chargement uniforme, la solution générale de la flèche est trouvée tout simplement en remplaçant P_{mn} par sa valeur dans la solution générale donnée par la formule générale :

$$W(x, y) = \frac{16P_0}{D\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.21)$$

La déformation maximale se produit au centre de la plaque ($x = a/2, y = b/2$) et sa valeur, d'après l'Équation 2.21, est donnée par :

$$w_{max} = \frac{16P_0}{D\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.22)$$

Si on pose

$$\mu = \frac{16P_0}{D\pi^6} ; \quad u_{m,n} = \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.23)$$

L'équation 2.22 s'écrit sous la forme simplifiée :

$$w_{max} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu U_{m,n} \quad (2.24)$$

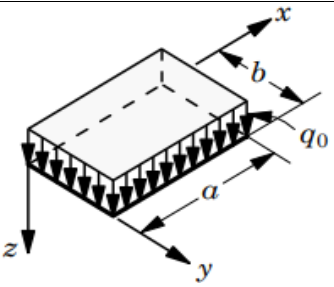
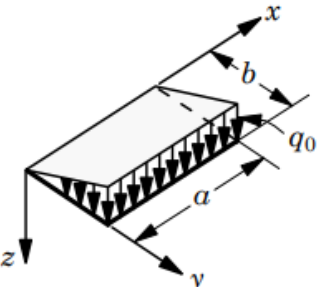
Cette série est assez rapidement convergente [15].

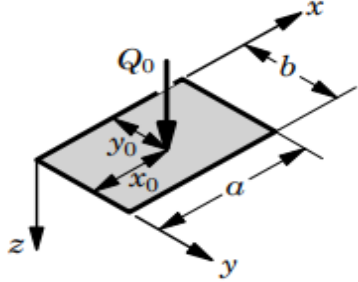
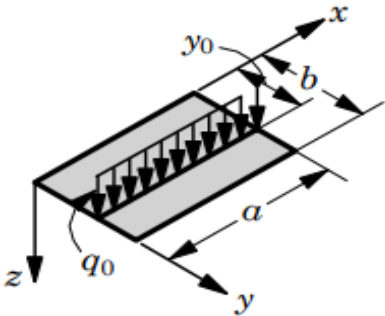
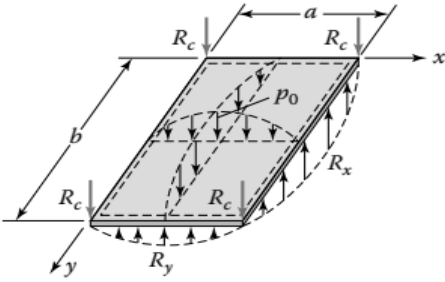
Un script sera développé sous MATLAB pour étudier les caractéristiques de cette méthode pour une application donnée (voir [Chapitre 3](#))

En introduisant l'Équation 2.22 dans les Équations 1.10, 1.12 et 1.19 les composantes des moments, contraintes et forces de cisaillement sont aussi calculées pour ce cas précis (plaque simplement appuyée sur ses 4 bords soumise à une charge uniformément répartie p_0)

Le **Tableau 2-1** ci-dessous donne la valeur du coefficient $p_{m,n}$ (ou $q_{m,n}$) pour les autres types de chargement, les telles valeurs qu'on pourra remplacer à chaque fois dans la solution générale (2.15) pour trouver la solution du déplacement $w(x, y)$ pour un chargement donné.

Tableau 2-1 valeur de q_{mn} ou p_{mn} sous différents chargements pour la méthode de Navier [3]

Géométrie	Coefficients $q_{m,n}$ ou $p_{m,n}$
	<p>✚ Charge uniformément répartie</p> $q(x, y) = q_0 = c^{te}$ $q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}$ $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$
	<p>✚ Charge hydrostatique</p> $q(x, y) = q_0 \frac{y}{b}$ $q_{mn} = \frac{8q_0}{mn\pi^2} (-1)^{n+1}$ $(m = 1, 3, 5, \dots); (n = 1, 2, 3, \dots)$

	<ul style="list-style-type: none"> • Charge concentrée en un point (i.e., Q_0 située à (x_0, y_0)) $q_{mn} = \frac{4Q_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$
	<ul style="list-style-type: none"> • Charge linéaire $q(x, y) = q_0 \delta(y - y_0)$ $q_{mn} = \frac{8q_0}{mb\pi} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ $(m = 1, 3, 5, \dots); (n = 1, 2, 3, \dots)$
	<ul style="list-style-type: none"> • Charge sinusoïdale $p(x, y) = P_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$ $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$

2.2.3 Méthode de Lévy

En 1900, Lévy a proposé une méthode pour l'analyse de la flexion des plaques rectangulaires ayant deux bords opposés simplement appuyés (par exemple, à $x = 0$ et $x = a$) et avec des conditions d'appui quelconques pour les deux autres bords (à $y = \pm b/2$) voir [Figure 2-2](#). Lévy propose l'utilisation d'un développement en séries de Fourier simples. La méthode proposée par Lévy s'avère plus pratique que celle proposée par Navier. D'une part, les calculs numériques sont plus simples quand il s'agit d'une série simple. D'autre part, la méthode de Lévy s'applique à la flexion des plaques avec une plus grande variété de conditions de bord

[22, 10]. Lévy présente une solution de l'équation de Lagrange exprimée comme la somme d'une partie complémentaire w_h Et d'une partie particulière w_p [10]. Chacune de ces deux parties consiste en une série de Fourier simple [15]:

$$w = w_h + w_p \quad (\mathbf{a})$$

Les six problèmes auxquels le développement de Maurice Levy est applicable sont [22] :

- 1) 4 bords appuyés (problème de Navier)
- 2) 3 bords appuyés, le 4^e libre (cas de Vannes)
- 3) 3 bords appuyés, le 4^e encastré
- 4) 2 bords appuyés, 2 bords opposés libres
- 5) 2 bords appuyés, 2 bords opposés encastrés
- 6) 2 bords appuyés, 1 bords libres, 1 bords encastrés

Dans ce travail nous allons nous intéresser aux problème (1) et (5).

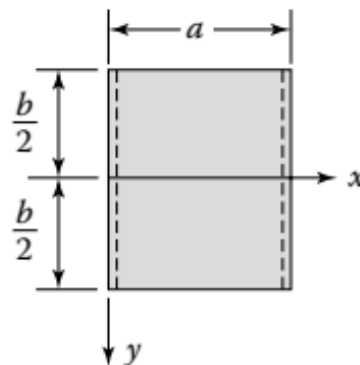


Figure 2-2 Position standard du système de coordonnées dans la méthode de Lévy

2.2.3.1 Plaque simplement appuyée sur ses 4bords : Problème de Navier

Dans ce premier cas, Considérons une plaque dont les bords opposés, $x = 0$ et $x = a$, sont simplement appuyés, et les deux autres bords opposés, $y = 0$ et $y = b$, peuvent avoir des supports arbitraires. Les conditions aux limites sur les bords simplement appuyés sont :

$$w(x, y) = 0 \Big|_{x=0,a}$$

$$w(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0,a} \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=0,a} \quad (2.25)$$

Selon la proposition de Lévy, la solution complémentaire est prise égale à [16, 23] :

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.26)$$

Où $f_m(y)$ est une fonction qui ne dépend que de y . De plus w_h , respecte les conditions aux limites des bords simplement appuyés définies en (2.25). En insérant l'expression (2.26) dans l'équation différentielle homogène $\nabla^2 \nabla^2 w_h = 0$, on obtient :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m \right] \sinh \frac{m\pi x}{a} = 0$$

Cette équation est valable si la quantité entre parenthèses est nulle :

$$\frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m = 0 \quad (2.27)$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire peut s'exprimer comme suit :

$$f_m(y) = e^{\lambda y} \quad (2.28)$$

En insérant cette expression dans l'Équation (2.27), on aboutit à l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 = 0 \quad (2.29)$$

Cette équation admet les deux racines doubles suivantes :

$$\lambda_{1,2} = \frac{m\pi}{a}, \lambda_{3,4} = -\frac{m\pi}{a} \quad (2.30)$$

En se basant sur les valeurs des exposants caractéristiques obtenues, la solution de l'équation homogène peut être représentée par des fonctions exponentielles :

$$f_m(y) = A'_m e^{m\pi y/a} + B'_m e^{-m\pi y/a} + C'_m y e^{m\pi y/a} + D'_m y e^{-m\pi y/a} \quad (2.31)$$

Ou en utilisant les fonctions hyperboliques ;

$$f_m(y) = A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + y \left(C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (2.32)$$

La solution complémentaire est alors donnée par :

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + y \left(C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.33)$$

Les constantes A_m , B_m , C_m et D_m sont déterminées à partir des conditions limites aux bords $y = 0$ et $y = b$. Elles seront déterminées plus tard pour des cas précis.

La solution particulière w_p est aussi exprimée sous la forme d'une série de Fourier simple :

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.34)$$

Remarquons que l'équation (2.34) satisfait aussi aux conditions aux bords données par les équations (2.25).

La charge latérale répartie $p(x, y)$ est considérée comme suit :

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.35)$$

Avec ;

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.36)$$

Cette charge dépend du type de chargement (Uniformément répartie, concentrée, hydrostatique, linéaire, triangulaire, etc...). Le **Tableau 2-2** donne les valeurs de cette charge pour quelques cas usuels .

En substituant les expressions 2.34 et 2.35 dans l'équation de Lagrange (1.21), on obtient :

$$\frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m = \frac{p_m}{D} \quad (2.37)$$

En résolvant cette équation, nous pouvons déterminer $f_m(y)$ et, enfin, trouver la solution particulière, $w_p(x, y)$.

Les composantes complémentaires des moments, M_{xh}, M_{yh}, M_{xyh} peuvent être exprimées en termes de $f_m(y)$ en substituant l'Équation (2.33) dans les Équations (1.10), comme suit [23]:

$$\begin{aligned} M_{xh} &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m - \nu \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \\ M_{yh} &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left(\nu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m - \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \\ M_{xyh} &= -D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \frac{df_m}{dy} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \quad (2.38a-c)$$

✚ Plaque simplement appuyé sur ses quatre bords soumis à une charge uniformément répartie (problème de Navier)

Ici on va résoudre le problème de Navier présenté à la section 2.2.2.3, par la méthode de Lévy. Soit une plaque rectangulaire simplement appuyée sur tous ses bords, ayant des dimensions a

et b (Figure 2-3) et soumise à une charge uniforme p_0 . Déterminons les flèches et les moments de flexion.

Étant donné que les conditions aux limites sont les mêmes sur tous les bords de la plaque et que la charge est uniforme (voir Figure 2-3), nous plaçons l'axe des x sur l'axe de symétrie de la plaque. Cela simplifie grandement la procédure de calcul, comme nous le verrons plus tard.

Dans ce cas $p(x, y) = p_0$, l'Équation (2.36), après intégration, devient :

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{4p_0}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.39a)$$

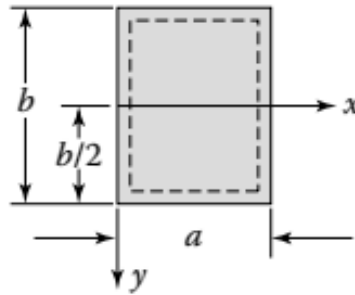


Figure 2-3 plaque simplement appuyée sur ses 4 bords

L'équation (2.39) dans (2.37) et on obtient :

$$\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 k_m = \frac{4p_0}{m\pi D} \quad (2.39b)$$

Comme le terme du second membre de l'éq (2.39b) est une constante, sa solution particulière sera aussi une constante. Par exemple, en posant :

$$k_m = A \quad (2.39c)$$

Et en substituant ce qui précède dans (2.39b), on a une solution particulière de l'éq (2.39b) :

$$A = \frac{4p_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \quad (2.39d)$$

Ainsi, en utilisant les Équations (239.c), (239.d) et (2.34), la solution particulière est de la forme suivante :

$$w_p(x, y) = \frac{4p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.40)$$

Cette expression peut également être réécrite sous une forme alternative (voir l'Exemple 3.1 de [10]) :

$$w_p(x, y) = \frac{4p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{p_o}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3 x) \quad (2.41)$$

L'expression (2.41) décrit les déformations d'une plaque simplement appuyée, soumise à une charge uniforme et ayant une largeur unitaire, parallèle à l'axe des x . Grâce à la symétrie des conditions aux limites et de la charge appliquée, on peut conclure que la déformation de la plaque sera également symétrique par rapport à l'axe des y , ce qui signifie que $w(x, y) = w(x, -y)$. Cette condition est vérifiée par l'Équation (2.33) si l'on pose $A_m = 0$ et $D_m = 0$. En combinant les Équations (2.33) et (2.41), on obtient [15]:

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + y C_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{4p_o a^4}{m^5 \pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.42a)$$

Ou, alternativement, en utilisant l'expression (2.41)

$$w = \frac{p_o}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3 x) + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + y C_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.42b)$$

Les Équations (2.42) vérifient parfaitement l'Équation (1.21) ainsi que les conditions aux limites (2.25) aux points $x = 0$ et $x = a$. Les autres conditions aux limites s'écrivent comme suit :

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \left(y = \pm \frac{b}{2} \right) \quad (2.43)$$

En appliquant cette approche à w , on obtient deux équations permettant de déterminer B_m et C_m .

$$B_m \cosh \alpha_m + \frac{b}{2} C_m \sinh \alpha_m + \frac{4p_o a^4}{m^5 \pi^5 D} = 0 \quad (2.44a)$$

$$2 \left(\frac{B_m \alpha_m}{b} + C_m \right) \cosh \alpha_m + C_m \alpha_m \sinh \alpha_m = 0$$

Avec ;

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (2.44b)$$

En les résolvant, on trouve :

$$B_m = - \frac{4p_o a^4 + m\pi p_o a^3 b \tanh \alpha_m}{m^5 \pi^5 D \cosh \alpha_m} \quad (2.44c)$$

$$C_m = \frac{2p_o a^3}{m^3 \pi^3 D \cosh \alpha_m}$$

Ainsi, la déformation de la surface de la plaque, donnée par l'Équation (2.42a), peut s'écrire sous la forme suivante :

$$w = \frac{4p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.45)$$

La déformation maximale se produit au centre de la plaque, c'est-à-dire en $(x = a/2, y = 0)$, d'où :

$$w_{max} = \frac{4p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) \quad (2.46a)$$

Soit,

$$\beta = \frac{4p_o a^4}{\pi^5 D} \quad ; \quad V_m = \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \right) \quad (2.47a)$$

D'où,

$$w_{max} = \sum_{m,n} \beta V_m \quad (2.47b)$$

Cette série converge très rapidement, et une précision suffisante est obtenue en ne prenant que le premier terme, Elle donne le même résultat que Navier (voir équation 2.22) en considérant peu de termes [10].

En substituant l'expression (2.41) dans les équations (2.38a-b), nous obtenons les expressions suivantes pour les moments de flexion [13]:

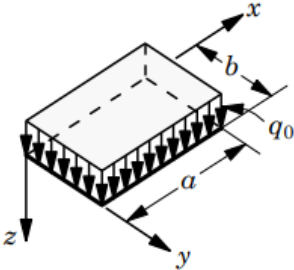
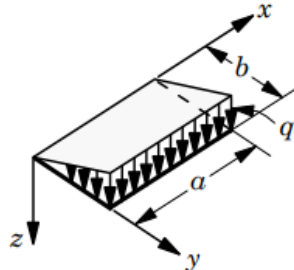
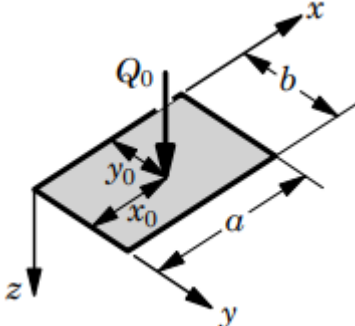
$$m_x = \frac{p_o x(a-x)}{2} + (1-\nu)p_o a^2 \pi^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} m^2 \left[B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1-\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

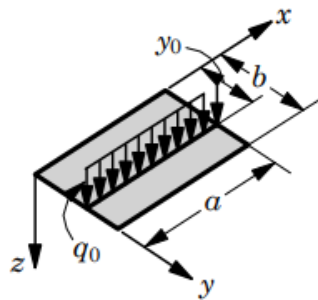
$$m_y = \nu \frac{p_o x(a-x)}{2} - (1-\nu)p_o a^2 \pi^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} m^2 \left[B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{1-\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sinh \frac{m\pi y}{a}$$

(b)

Les deux séries convergent rapidement ; rien que le premier terme offre une précision acceptable [13].

Tableau 2-2 valeur de q_{mn} ou p_{mn} sous différents chargements pour la méthode de Lévy [3]

Chargement	Coefficients $q_{m,n}$
	<ul style="list-style-type: none"> • Charge uniformément répartie $q(x, y) = q_0 = c^{te}$ $q_n = \frac{4q_0}{n\pi}$ $(n = 1, 3, 5, \dots)$
	<ul style="list-style-type: none"> • Charge hydrostatique $q(x, y) = q_0 \frac{y}{b}$ $q_n = \frac{2q_0}{n\pi} (-1)^{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$
	<ul style="list-style-type: none"> • Charge concentrée en un point (i.e., Q_0 située à (x_0, y_0)) $q_n = \frac{2Q_0}{b} \delta(x - x_0) \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$



- **Charge linéaire**

$$q(x, y) = q_0 \delta(y - y_0)$$

$$q_{mn} = \frac{2q_0}{b} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

2.2.3.2 Plaques sous conditions mixtes aux bords : Cas d'une plaque encadrée le long de deux bords opposés et appuyée sur les deux autres.

✚ Plaques rectangulaires soumises à des moments appliqués le long des bords

Prenons l'exemple d'une plaque rectangulaire simplement appuyée, soumise à des moments uniformément répartis sur ses bords situés en $y = \pm b/2$. Ces moments sont représentés par une série de Fourier en sinus (voir Figure 2-4) [10];

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} M_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \left(y = \pm \frac{b}{2} \right) \quad (2.48)$$

Ici, M_m représente l'ensemble des coefficients inconnus

$$M_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (2.49)$$

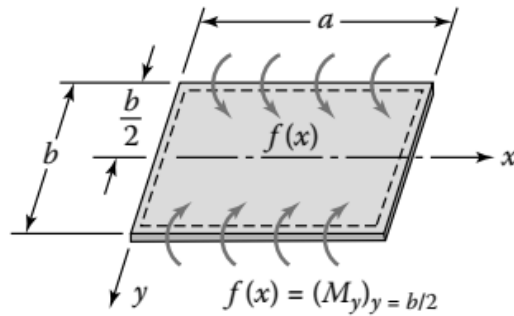


Figure 2-4 Plaque soumise à des moments appliqués sur deux bords parallèles [10]

Les conditions aux limites sont :

$$w(x, y) = 0 \Big|_{x=0, a}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=0, a} \quad (2.50a-c)$$

$$w = 0 \quad \left(y = \pm \frac{b}{2} \right) \quad ; \quad -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) \quad \left(y = \pm \frac{b}{2} \right)$$

La résolution du problème se poursuit en supposant que la déformation de la plaque prend la forme de l'Équation 2.41 avec $p_o = 0$, sauf que la sommation s'étend cette fois sur $m = 1, 2, 3, \dots$:

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + y C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.51a)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

On vérifie que cette équation satisfait bien l'Équation 1.21 ainsi que les conditions aux limites données en (2.50a), comme expliqué dans la Section 2.2.3.1. Quant à l'équation (2.50b), elle est respectée si l'on impose que les termes entre parenthèses soient nuls [16].

En reprenant l'approximation $\alpha_m = m\pi b/2a$, on obtient [10, 15]:

$$B_m = -\frac{b}{2} C_m \tanh \alpha_m \quad (2.52a)$$

Ainsi, l'équation (2.51) s'écrit sous la forme suivante :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(y \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.53a)$$

En injectant les expressions (2.53a) et (2.48) dans l'équation (2.50c), nous obtenons la relation suivante :

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} C_m \cosh \alpha_m \sinh \frac{m\pi y}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \quad (2.53b)$$

Il en résulte que :

$$C_m = -\frac{aM_m}{2m\pi D \cosh \alpha_m} \quad (2.52b)$$

On en déduit que la déformation de la plaque w :

$$w = \frac{aM_m}{2\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{m\pi x}{a}}{m \cosh \alpha_m} M_m \left(\frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (2.54)$$

Les moments de flexion dans ce cas peuvent être obtenus en remplaçant l'Équation 2.54 dans les équations 1.10.

- Si les moments sont *uniformément répartis*, alors on a $f(x) = M_o$.

En appliquant cette condition à l'Équation (2.49), on obtient,

$$M_m = \frac{4M_o}{m\pi} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.55)$$

Ce qui permet d'écrire l'Équation 2.54 sous la forme suivante :

$$w = \frac{2aM_o}{D\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \cosh \alpha_m} \left(\frac{b}{2} \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (2.55)$$

Le déplacement le long de l'axe de symétrie ($y = 0$) est :

$$w = \frac{abM_o}{D\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_m} \sinh \frac{m\pi x}{a} \quad (2.56)$$

✚ **Plaque encadrée le long de deux bords opposés et appuyée sur les deux autres.**

Supposons que les bords $x = 0$ et $x = a$ de la plaque rectangulaire, illustrée à la Figure 2-5a, soient simplement appuyés et que les deux autres bords soient encadrés.

La déformation de la plaque sous une charge latérale quelconque peut être obtenue en résolvant d'abord le problème sous l'hypothèse que tous les bords sont simplement appuyés (plaque 1 ou Figure 2-5b), puis en appliquant des moments de flexion le long des bords $y = \pm b/2$ d'une ampleur telle qu'ils éliminent les rotations produites sur ces bords par l'effet de la charge latérale voir plaque 2 Figure 2-5c : il s'agit de la méthode de la superposition [10].

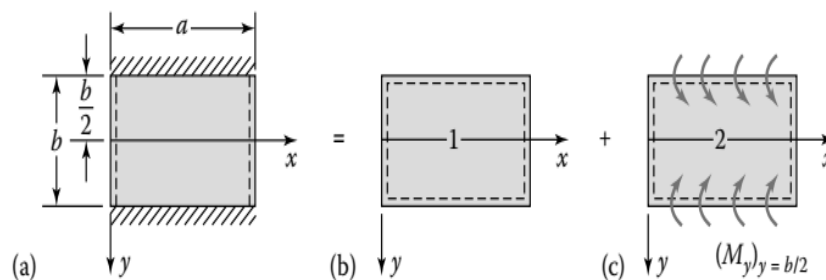


Figure 2-5 Superposition d'une plaque encadrée le long de deux bords opposés et appuyée sur les deux autres [15]

Considérons maintenant le cas de la plaque 1 où les bords de la plaque sont simplement appuyés et soumis à une charge uniformément répartie p_o , le déplacement, à partir de l'Équation 2.45, est donné par [2, 15]:

$$w_1 = \frac{4p_o a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Le long du bord $y = b/2$, la plaque subit une rotation qui est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{4p_o a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} [\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)] \sinh \frac{m\pi x}{a} \quad (2.57)$$

Afin de supprimer cette rotation et de respecter les conditions aux limites de la plaque d'origine, on applique les moments de flexion suivants sur les bords en $y = \pm b/2$ de la plaque 2 :

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} M_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.58)$$

Les coefficients M_m sont ajustés de façon à ce que la pente causée par ces moments compense exactement celle décrite par l'Équation (2.57).

La déflexion de la plaque 2 peut être déterminée à l'aide de l'Équation 2.54. Pour les bords situés en $y = \pm b/2$, on obtient alors :

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{2a}{D\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} M_m (\tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1) - \alpha_m) \sinh \frac{m\pi x}{a} \quad (2.59)$$

Pour que les pentes des deux plaques soient égales en valeur absolue mais opposées en signe sur les bords $y = \pm b/2$, la condition suivante doit être respectée :

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_2}{\partial y} \quad \left(y = \pm \frac{b}{2} \right) \quad (2.60)$$

En combinant les Équations (a) et (c) dans l'expression précédente, puis en résolvant, nous trouvons :

$$M_m = \frac{4p_o a^2}{m^3 \pi^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \quad (2.61)$$

Après avoir déterminé l'expression de M_m , nous pouvons calculer la déflexion de la plaque 2 en substituant l'Équation 5.46 dans l'Équation 5.40. Nous obtenons alors :

$$w_2 = -\frac{2p_o a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \frac{m\pi x}{a} \alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{m^5 \cosh \alpha_m \alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \left(\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (2.62a)$$

Il s'agit d'une série à convergence rapide, et la déformation peut être obtenue avec un haut degré de précision en ne prenant que quelques termes [2]. Dans le cas d'une plaque carrée (a=b),

$$w_2 = -\frac{2p_o a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2} \alpha_m \tanh \alpha_m \alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{m^5 \cosh \alpha_m \alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \quad (2.62b)$$

En additionnant w_2 et w_1 nous obtenons finalement la déformation maximale d'une plaque rectangulaire uniformément chargée avec deux bords simplement appuyés et deux bords encastres la valeur :

$$w_{max} = w_1 + w_2 \quad (2.63)$$

Note : un code sera développé sous MATLAB en fin d'apprécier les caractéristiques de la méthode de Lévy par le biais d'une application pour les deux cas traités ici : cas d'une plaque simplement appuyée sur ses 4 bords et le cas où la plaque est simplement appuyée sur deux bords opposés et encastree sur les deux autres.

2.2.4 Comparaison entre la solution de Navier et celle de Lévy

À partir de l'étude des deux méthodes présentées, voici les principaux points d'observation [25] :

- 1) Les solutions proposées par Navier se distinguent par leur simplicité, tandis que celles de Lévy sont plus détaillées et longues.
- 2) Pour obtenir des résultats satisfaisants avec la méthode de Navier, il est nécessaire d'employer un plus grand nombre de termes dans la série. En revanche, la méthode de

Lévy parvient à fournir des résultats précis avec seulement quelques termes. Bref, la méthode de Lévy converge plus rapidement que la méthode de Navier.

- 3) La solution de Navier est limitée aux plaques dont les quatre bords sont simplement appuyés. La méthode de Lévy, quant à elle, est applicable même si seuls deux bords opposés sont simplement appuyés, les deux autres pouvant obéir à n'importe quelles conditions.
- 4) La méthode de Lévy s'adapte à l'analyse de plaques avec divers types de conditions aux limites, alors que la solution de Navier ne peut être utilisée que pour des plaques aux quatre bords simplement appuyés

2.3 Méthodes numériques

2.3.1 Introduction

Les méthodes numériques représentent une alternative puissante aux approches analytiques, notamment pour les problèmes impliquant des géométries complexes ou des conditions aux limites non standards [26]. Ces méthodes reposent sur la discrétisation des équations différentielles, transformant un problème continu en un système discret résolu par des algorithmes informatiques [27]. Dans ce mémoire, deux méthodes numériques principales sont explorées : la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

2.3.2 Méthode de différences finies (MDF)

2.3.2.1 Introduction

Dans cette méthode, les équations différentielles sont remplacées par des équations aux différences finies [28]. La plaque est discrétisée en un maillage ([Figure 2-6b](#)), et les flèches (déplacements verticaux) aux points d'intersection des lignes de ce maillage sont considérées comme des inconnues. L'équation de la plaque, ainsi que les moments, efforts tranchants, etc., sont exprimés en fonction des différences entre les flèches des points voisins [25].

En appliquant l'équation de la plaque, une équation est formulée à chaque nœud du maillage. Si un point du schéma tombe en dehors du domaine de la plaque, sa flèche est remplacée par celle d'un point intérieur à l'aide des conditions aux limites. Le système d'équations ainsi obtenu est ensuite résolu pour déterminer les déplacements verticaux à chaque point du maillage [25].

Dans cette section, une comparaison entre la méthode des différences finies et les méthodes classiques (analytiques) est d'abord présentée. Ensuite, les expressions en différences finies pour l'équation de la plaque et les expressions de déplacement max sont établies. Deux problèmes abordés remédiés par les méthodes analytiques à la section **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** sont résolus.

2.3.2.2 Comparaison entre la Méthode Classique et la Méthode des Différences Finies (MDF)

Cette comparaison révèle les points clés suivants [25]:

- La méthode classique vise des solutions exactes à partir d'équations exactes, tandis que la MDF résout approximativement les mêmes équations exactes.
- La méthode classique est limitée à quelques cas standards, alors que la MDF peut aborder une gamme plus large de problèmes.
- Face aux complexités (forme, conditions aux limites, chargement), la méthode classique procède par approximations importantes, contrairement à la MDF qui traite le problème tel quel sans hypothèses simplificatrices de forme ou de chargement régulier.
- La méthode classique rencontre des difficultés avec les matériaux anisotropes, un aspect que la MDF gère plus facilement

Cette comparaison est aussi valable pour la méthode des éléments finis présentée à la section 0 de ce chapitre.

2.3.2.3 Expression des différences finies

Les expressions des différences finies peuvent être obtenues à partir de la définition de la dérivée première d'une fonction continue $y = f(x)$ par rapport à x (voir Figure 2-6a) [10, 17].

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \quad (2.64a)$$

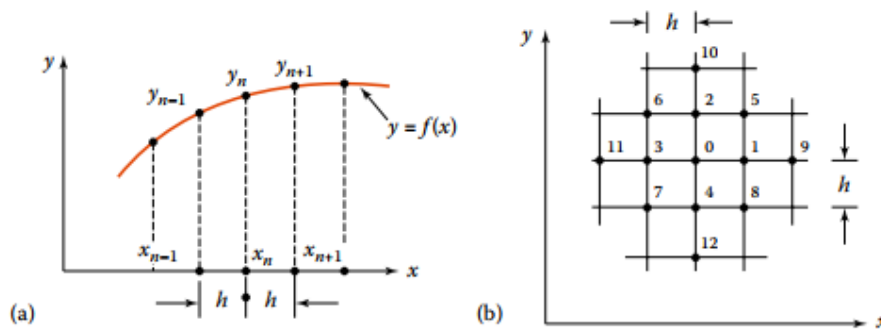


Figure 2-6 a) Approximation de $f(x)$ par la méthode des différences finies ;
b) Frontière rectangulaire divisée en un maillage carré [25, 10].

Avec n un point quelconque sur la courbe. Lorsque l'on considère un petit intervalle $\Delta x = h$, l'expression ci-dessus donne une approximation de la dérivée à ce point :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n \approx \frac{\Delta y_n}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \quad (2.64b)$$

Ici, Δy_n correspond à la première différence avant de y au point x_n ;

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \approx h \left(\frac{dy}{dx}\right)_n \quad (2.65)$$

La première différence arrière de y au point n , notée Δy_n , est :

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1} \approx h \left(\frac{dy}{dx}\right)_n \quad (2.66)$$

On distingue aussi Les différences centrales qui utilisent des points situés de part et d'autre de x_n , ce qui permet généralement d'obtenir des approximations plus précises que les différences avant et arrière [29]. Ainsi, la première différence centrale δy_n est donnée par [15]:

$$\delta y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1}) \approx h \left(\frac{dy}{dx} \right)_n$$

La procédure employée précédemment peut également être utilisée pour obtenir les dérivées d'ordre supérieur. À partir de ce moment, nous allons nous concentrer exclusivement sur les différences centrales.

La seconde dérivée peut être formulée en utilisant la différence de la première dérivée.

$$h^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n \approx \Delta(\nabla y_n) = \nabla(\Delta y_n) = \delta^2 y_n \quad (2.67)$$

La seconde différence centrale en x_n , après avoir inséré les Équations 2.65 et 2.66 dans l'expression 2.67, est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta^2 y_n &= \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}) \\ &= (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \approx h^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n \end{aligned} \quad (2.68)$$

Les différences centrales d'ordre trois et quatre sont données à leurs tours par ;

$$\begin{aligned} \delta^3 y_n &= \delta(\delta^2 y_n) = \delta y_{n+1} - 2\delta y_n + \delta y_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(y_{n+2} - y_n) - (y_{n+1} - y_{n-1}) + \frac{1}{2}(y_n - y_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2}(y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}) \approx h^3 \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_n \end{aligned} \quad (2.69)$$

Et ;

$$\begin{aligned}
\delta^4 y_n &= \delta^2(\delta^2 y_n) = \delta^2 y_{n+1} - 2\delta^2 y_n + \delta^2 y_{n-1} \\
&= (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) - 2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) \\
&= y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} - y_{n-2} \approx h^4 \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right)_n
\end{aligned}$$

(2.70)

Le terme "différences finies" sera désormais utilisé pour désigner les différences centrales.

Abordons maintenant le cas de la fonction $w(x, y)$ qui dépend de deux variables. Prenons l'exemple d'une plaque rectangulaire. En posant $\Delta x = \Delta y = h$, cette plaque sera divisée en un maillage carré (Figure 2-6b). Les Équations 2.67 et 2.68 mènent respectivement à [15, 30]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{1}{h} \delta_x w \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{1}{h} \delta_y w \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \delta_x^2 w \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h} \delta_y^2 w \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{h} \delta_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \approx \frac{1}{h} \delta_y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

(2.71a-b)

Les indices x et y indiquent les directions dans lesquelles les différences sont prises.

Les expressions ci-dessus, qui se basent sur la définition des dérivées partielles, s'écrivent au *point 0* de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{1}{2h} [w(x+h, y) - w(x-h, y)] = \frac{1}{2h} (w_1 - w_3) \\
\frac{\partial w}{\partial y} &\approx \frac{1}{2h} [w(x, y+h) - w(x, y-h)] = \frac{1}{2h} (w_2 - w_4)
\end{aligned}$$

(2.72a)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [w(x+h, y) - 2w(x, y) + w(x-h, y)] = \frac{1}{h^2} (w_1 - 2w_0 + w_3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2} [w(x, y+h) - 2w(x, y) + w(x, y-h)] = \frac{1}{h^2} (w_2 - 2w_0 + w_4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{h^2} \delta_x (\delta_y w) = \frac{1}{2^2} (\delta_x w_2 - \delta_x w_4) = \frac{1}{4h^2} (w_5 - w_6 + w_7 - w_8)$$

(2.72b)

Ainsi, l'opérateur de Laplace au *point* 0 peut être approximé par la méthode des différences finies de la manière suivante :

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0) \quad (2.73)$$

De la même manière ;

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \approx \frac{1}{h^3} \delta_x^3 w = \frac{1}{2h^3} (w_9 - 2w_1 + 2w_3 - w_{11})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^4} \delta_x^4 w = \frac{1}{h^3} (w_9 - 4w_1 + 6w_0 - 4w_3 + w_{11})$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \approx \frac{1}{h^3} \delta_y^3 w = \frac{1}{2h^3} (w_{10} - 2w_2 + 2w_4 - w_{12}) \quad (2.74a-d)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx \frac{1}{h^4} \delta_y^4 w = \frac{1}{h^4} (w_{10} - 4w_2 + 6w_0 - 4w_4 + w_{12})$$

Les dérivées mixtes s'expriment également par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &\approx \frac{1}{h^3} \delta_x (\delta_y^2 w) = \frac{1}{h^3} (\delta_x w_2 - 2\delta_x w_0 + \delta_x w_4) \\
&= \frac{1}{2h^3} (w_5 - w_6 - 2w_1 + 2w_3 + w_8 - w_7) \\
\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &\approx \frac{1}{h^3} \delta_y (\delta_x^2 w) = \frac{1}{2h^3} (w_5 + w_6 - 2w_2 + 2w_4 - w_8 - w_7) \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &\approx \frac{1}{h^4} \delta_x^2 (\delta_y^2 w) = \frac{1}{h^4} [w_5 + w_6 + w_7 + w_8 + 4w_0 - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)]
\end{aligned}
\tag{2.75a-c}$$

Grâce aux approximations des dérivées par différences finies, on peut facilement obtenir l'équivalent discret des équations de la plaque. Pour référence, certains opérateurs utiles en différences finies sont présentés sous forme de motifs de coefficients (Voir [Figure 2-7](#)).

2.3.2.4 Représentation par différences finies de l'équation de la plaque

Nous sommes maintenant en mesure de reformuler l'équation différentielle décrivant la déformation de la plaque en une équation algébrique. Prenons un point intérieur, comme le point 0 illustré dans la [Figure 2-6b](#). En nous référant à l'opérateur ∇^4 présenté à la [Figure 2-7](#), nous obtenons l'équation aux différences correspondant à l'Équation 1.21 [10] ;

$$\begin{aligned}
&[w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12} + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) \\
&\quad - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 20w_0] \frac{1}{h^4} = \frac{p_o}{D}
\end{aligned}
\tag{2.76}$$

Cette équation est résolue pour déterminer les déformations.

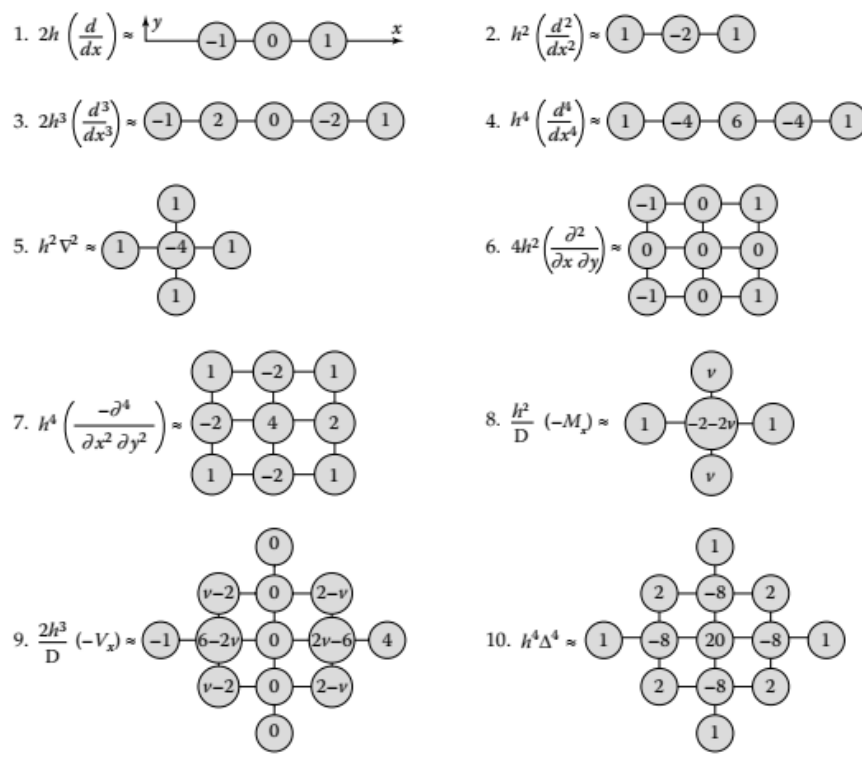


Figure 2-7 Schémas de Coefficients pour Certains Opérateurs de Différences Finies [13]

En parallèle, les conditions aux limites sont converties en équations aux différences finies aussi (voir Figure 2-8). Une autre méthode pour résoudre le problème de la flexion de la plaque est expliquée en Section 1.9.1, où les Équations 1.21 peuvent être remplacées par deux équations du second ordre (Équations 1.26 et 1.27). L'application de l'opérateur ∇^2 de la Figure 2-7 à ces équations au point 0 mène à [15]:

$$(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - M_0) \frac{1}{h^4} = -p_o \tag{2.77}$$

$$\frac{1}{h^2} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0) = \frac{p_o}{D} \tag{2.78}$$

Des équations similaires peuvent être formulées pour les autres nœuds de la plaque. Pour résoudre le problème, il faut déterminer les valeurs de M et w qui respectent à la fois le système

d'équations et les conditions aux limites. Si la plaque est simplement appuyée, M et w sont nuls aux bords, ce qui permet de résoudre les équations en deux étapes distinctes. En revanche, pour des plaques avec des bords encastrés, libres ou des conditions mixtes, les deux systèmes doivent être résolus en même temps. Dans ces derniers cas, les valeurs de M peuvent différer selon les bords, et le déplacement w peut être calculée plus directement avec l'Équation 2.76, plutôt que par les Équations 2.77 et 2.78 [15].

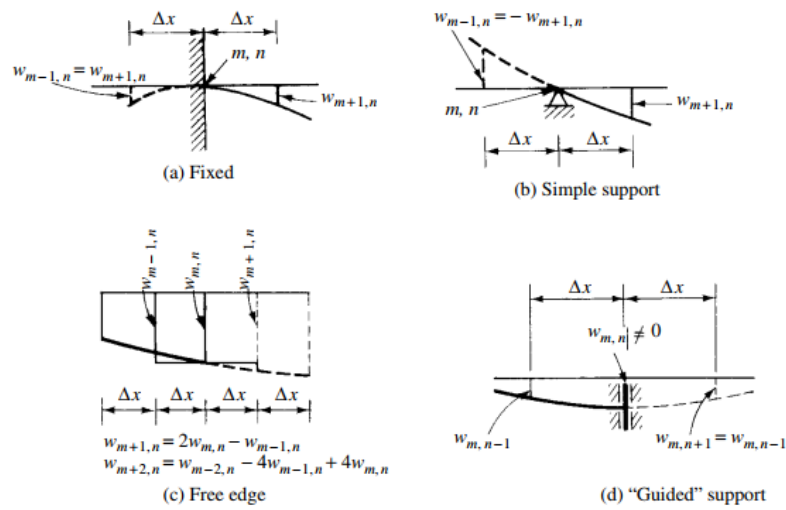


Figure 2-8 Représentation des conditions aux limites pour la MDF ordinaire [13]

Une fois les valeurs de M et w calculées pour tous les nœuds, on peut en déduire les expressions des moments et des forces de cisaillement à l'aide des Équations 1.10 et 1.19, au point 0 [10]:

$$\begin{aligned}
 - M_x &= \frac{D}{h^2} [2w_0 - w_1 - w_3 + \nu(2w_0 - w_2 - w_4)] \\
 - M_y &= \frac{D}{h^2} [2w_0 - w_2 - w_4 + \nu(2w_0 - w_1 - w_3)] \\
 - M_{xy} &= \frac{D(1-\nu)}{4h^2} (-w_5 - w_6 + w_7 + w_8) \\
 - Q_x &= \frac{D}{2h} (M_1 - M_3) \\
 - Q_y &= \frac{D}{2h} (M_2 - M_4)
 \end{aligned} \tag{2.79a-e}$$

2.3.2.5 Analyse de la déformation d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses 4 bords sous une charge uniformément répartie avec la méthode de différences finies

Ici, nous allons utiliser les techniques de différences finies pour analyser la flexion d'une plaque carrée (de taille $a \times a$) avec des bords simplement appuyés, soumise à une charge uniformément répartie de p_0 .

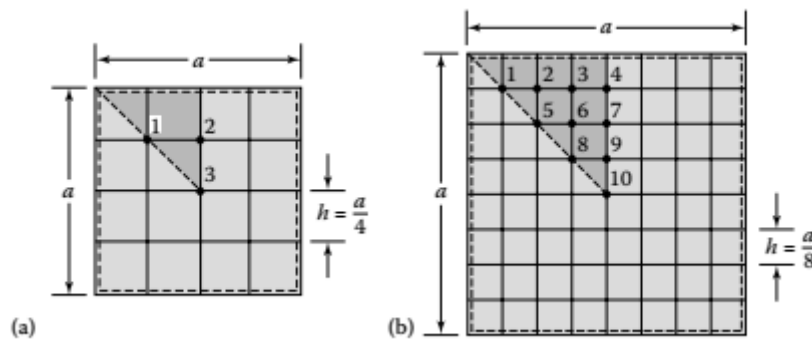


Figure 2-9 plaque simplement appuyée avec une charge uniforme discrétisée en :
(a) maillage 4X4 ; (b) maillage 8X8 [10]

Pour mieux comprendre le calcul des moments et des déformations, on prend un exemple simple : une plaque carrée soumise à une charge uniforme. Pour simplifier l'analyse, on divise la plaque en 16 petits carrés et on choisit $\Delta x = \Delta y = a/4$ (voir Figure 2-9a) [10, 15, 2].

Grâce à la symétrie, il suffit d'effectuer les calculs sur **un huitième** de la plaque (représenté par le triangle ombré sur la Figure 2-9a). Ainsi, on ne considère que les points 0, 1 et 2, où M et w ne sont pas nuls. Pour les autres points (3, 4, 5), ces valeurs sont nulles en raison des conditions aux limites.

En prenant le point central (point 0), on trouve les secondes différences des moments en utilisant les relations de symétrie :

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} = \Delta_{xx} M_0 = 2M_1 - 2M_0 \quad (2.80a)$$

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} = \Delta_{yy} M_0 = 2M_1 - 2M_0$$

Où M_0 et M_1 sont les valeurs du moment en 0 et 1 respectivement.

De la même manière, pour le point 1 :

$$\Delta_{xx} M_1 = M_0 - 2M_1 \quad (2.80b)$$

$$\Delta_{yy} M_1 = 2M_2 - 2M_1$$

On peut ensuite appliquer le même raisonnement au point 2 :

$$\Delta_{xx} M_2 = M_1 - 2M_2 \quad (2.80c)$$

$$\Delta_{yy} M_2 = M_1 - 2M_2$$

En insérant les équations 2.80a-c dans l'équation 1.26, on obtient au nœud 1,2,3 les équations algébriques suivantes :

$$2M_2 - 4M_1 = -p_o h^2$$

$$2M_1 + M_3 - 4M_2 = -p_o h^2 \quad (2.81a)$$

$$4M_2 - 4M_3 = -p_o h^2$$

En résolvant ce système, on a les solutions suivantes pour M_1, M_2 et M_3

$$M_1 = \frac{11}{16} p_o h^2 \quad ; \quad M_2 = \frac{7}{8} p_o h^2 \quad ; \quad M_3 = \frac{9}{8} p_o h^2 \quad (2.81b)$$

En substituant les valeurs de moments précédentes dans l'équation 1.27, on obtient un système de 3 Equations pour le calcul des déformations w_1, w_2 et w_3 :

$$2w_2 - 4w_1 = -\frac{11 p_o h^4}{16 D}$$

$$2w_1 + w_3 - 4w_2 = -\frac{7 p_o h^4}{8 D} \quad (2.82a)$$

$$4w_2 - 4w_3 = -\frac{9p_0h^4}{8D}$$

Un système qu'une fois résolu avec une méthode numérique de notre choix [30], et en prenant $h=a/4$, nous donne,

$$w_1 = 0,00214 \frac{p_0h^4}{D} \quad w_2 = 0,00293 \frac{p_0h^4}{D} \quad w_3 = 0,00403 \frac{p_0h^4}{D} \quad (2.82b)$$

On peut remarquer que la déformation maximale (au centre de la plaque) est bel et bien w_3 :

$$w_{max} = w_3 = 0,00403 \frac{p_0h^4}{D} \quad (2.82c)$$

En utilisant un maillage plus fin, nous pouvons espérer améliorer les résultats. Divisons le domaine en 64 petits carrés, chacun avec $h = a/8$. En tenant compte de la symétrie, nous numérotions les points nodaux comme indiqué dans la [Figure 2-9b](#). Les valeurs de M et w sont nulles sur les bords. En écrivant les équations aux différences finies aux points 1 à 10, nous obtenons 20 équations simultanées pour les 20 inconnues M et w aux points nodaux internes. En les résolvant, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_1 &= 0,01778p_0h^2 & M_6 &= 0,05377p_0h^2 \\ M_2 &= 0,02774p_0h^2 & M_7 &= 0,05664p_0h^2 \\ M_3 &= 0,03291p_0h^2 & M_8 &= 0,06523p_0h^2 \\ M_4 &= 0,03452p_0h^2 & M_9 &= 0,06888p_0h^2 \\ M_5 &= 0,04466p_0h^2 & M_{10} &= 0,07278p_0h^2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ensuite ;

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,000663 \frac{p_0h^4}{D} & w_6 &= 0,002733 \frac{p_0h^4}{D} \\ w_2 &= 0,001186 \frac{p_0h^4}{D} & w_7 &= 0,002937 \frac{p_0h^4}{D} \\ w_3 &= 0,001515 \frac{p_0h^4}{D} & w_8 &= 0,003507 \frac{p_0h^4}{D} \end{aligned} \quad (2.84a)$$

$$w_4 = 0,001627 \frac{p_o h^4}{D}$$

$$w_9 = 0,003770 \frac{p_o h^4}{D}$$

$$w_5 = 0,002134 \frac{p_o h^4}{D}$$

$$w_{10} = 0,004055 \frac{p_o h^4}{D}$$

La flèche au centre est w_{10} :

$$w_{max} = 0,004055 \frac{p_o h^4}{D} \quad (2.84b)$$

2.3.2.6 Analyse de la déformation d'une plaque encastree le long de deux bords opposés et appuyée sur les deux autres sous une charge uniformément répartie

Soit à trouver la flèche maximale et le moment max de la plaque carrée avec deux bords opposés encastres et deux bords simplement appuyés chargée uniformément illustrée à la [Figure 2-10](#) en utilisant la méthode des différences finies ordinaires [17].

Tout d'abord, nous choisissons un maillage aux différences finies relativement grossier avec $\lambda = h = a/4$: En numérotant les points du maillage, on prend en compte la double symétrie apparente de la plaque ([Figure 2-11A](#)). D'après les conditions aux limites encastres, il en résulte que les points fictifs situés en dehors du domaine de la plaque sont identiques aux points correspondants à l'intérieur de la plaque proprement dite. De même, les conditions aux limites simplement appuyées imposent que les points fictifs pertinents du maillage situé en dehors de la plaque doivent avoir un signe négatif,

Conformément à l'équation 2. 76 ; En appliquant le schéma de l'opérateur biharmonique ∇^4 ([Figure 2-7](#)) à chaque point intérieur du maillage, nous obtenons les équations simultanées suivantes données Sous forme matricielle $A^{(1)} \times w^{(1)} = P^{(1)}$ [17]:

$$\begin{pmatrix} 20 & -16 & -16 & 8 \\ -8 & 22 & 4 & -16 \\ -8 & 4 & 20 & -16 \\ 2 & -8 & -8 & 22 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \\ w_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_o \\ p_o \\ p_o \\ p_o \end{pmatrix} \frac{a^4}{256D} \quad (2.85a)$$

La solution de ces équations fournit une première approximation des ordonnées de la flèche aux points du maillage

$$\{w^{(1)}\} = (0,002466 \quad 0,001619 \quad 0,001822 \quad 0,001205) \frac{a^4 p_o}{D} \quad (2.85b)$$

$$w_{max} = w_1^{(1)} = 0,002466 \frac{a^4 p_o}{D}$$

Ensuite, nous utilisons des maillages plus fins, $\lambda=a/8$, comme montré à la [Figure 2-11B](#). Le système devient : $A^{(2)} \times w^{(2)} = P^{(2)}$

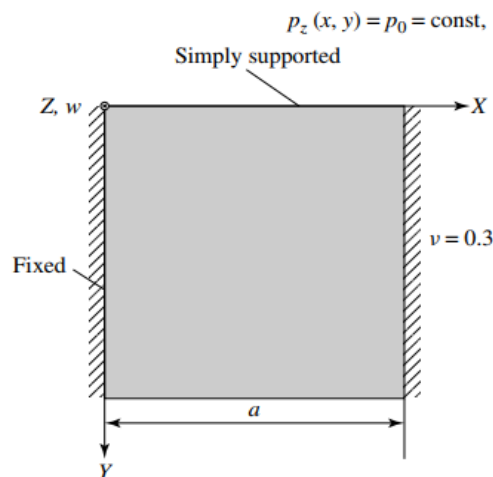


Figure 2-10 Plaque carrée avec deux bords opposés encastrés et deux bords simplement appuyés [13].

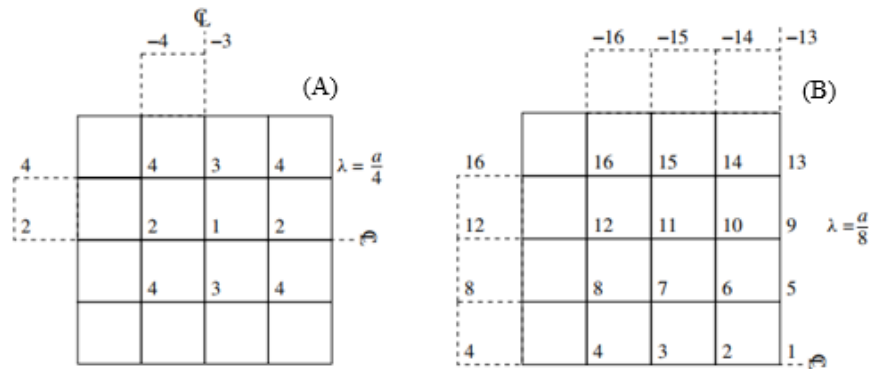


Figure 2-11 Subdivision de la plaque en maillage 4X4(A) ; maillage 8X8(B) [14]

En écrivant les équations aux différences finies aux points intérieurs tout en tenant compte de la symétrie, nous obtenons 16 équations simultanées pour 16 inconnues w_i aux points nodaux internes. En les résolvant, nous obtenons [14]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{(2)} = \{ & 0.2088 \quad 0.1868 \quad 0.1272 \quad 0.0507 \quad 0.1952 \quad 0.1748 \quad 0.1193 \\
 & 0.0478 \quad 0.1543 \quad 0.1385 \quad 0.0951 \quad 0.0387 \quad 0.0871 \quad 0.0784 \\
 & 0.0543 \quad 0.0226 \} \cdot \frac{p_0 a^4 \times 10^{-2}}{D} \quad (5.1.51)
 \end{aligned}$$

D'où ;

$$\mathbf{w}_{max} = \mathbf{w}_1^{(2)} = 0,002088 \frac{a^4 p_0}{D} \quad (2.85c)$$

Ainsi, pour les situations décrites, on remarque qu'un petit nombre de subdivisions de la plaque donne des résultats d'une précision acceptable pour des applications pratiques. Sur la base des résultats obtenus pour $h = a/4$ et $h = a/8$, une approximation encore meilleure peut être obtenue en appliquant des méthodes d'extrapolation (par exemple celle de Richardson), en utilisant des méthodes de différences finies d'ordre élevé, ou en réduisant davantage la taille du maillage h [26, 17].

Note : En suivant la démarche présentée dans les sections 2.3.2.5 & 2.3.2.6, nous pouvons calculer le déplacement maximal d'une plaque simplement appuyée sur ses 4 bords et celui

d'une plaque simplement appuyée sur deux bords opposés et deux autres encastres en considérant différents maillages en utilisant la méthode de différences finies

La résolution des systèmes algébriques formulés pour chaque maillage s'effectue ici via [32]

2.3.3 Méthode des éléments finis (MEF)

2.3.3.1 Introduction

La méthode des éléments finis, introduite dans les années 1960 avec l'avènement des ordinateurs numériques, permet de résoudre des problèmes complexes en ingénierie sans recourir directement aux équations différentielles [17, 33]. Elle repose sur la discrétisation d'une structure continue en un ensemble fini d'éléments interconnectés par des nœuds, assurant l'équilibre et la compatibilité aux points de jonction (voir *Figure 2-12*). Sa précision et son efficacité ont favorisé son application dans de nombreux domaines, notamment dans l'analyse des plaques et des coques [15].

Pour cette méthode, le domaine de la plaque est subdivisé en éléments discrets interconnectés par des nœuds. Chaque élément est caractérisé par des fonctions d'interpolation qui décrivent le comportement local du déplacement. L'équation de la plaque ainsi que les efforts internes (moments, efforts tranchants, etc.) sont alors formulées de manière locale pour chaque élément. En assemblant les équations associées à tous les éléments et en appliquant les conditions aux limites, on obtient un système global d'équations qui permet de déterminer les déplacements nodaux : c'est l'approche des déplacements finis pour l'étude du comportement des plaques [10, 34].

Dans cette partie, il est question de détailler le processus de formulation des équations élémentaires et l'assemblage du système global pour un élément plaque le calcul se fera via le logiciel Abaqus dont une brève présentation est donnée aussi à la section [2.3.4](#)

2.3.3.2 Propriétés d'un Élément Finis 2D

Considérons une plaque mince, comme celle illustrée à la *Figure 2-12*. Pour l'analyser, on la divise en plusieurs petits triangles connectés entre eux, représentés par des lignes en pointillés.

Chaque triangle, appelé élément fini, possède ses propres caractéristiques notées avec l'indice e [10].

✚ Matrice de Déplacement

Les déplacements $\{\delta\}_e$ des points situés aux extrémités de chaque triangle (appelés nœuds) sont reliés aux déplacements à l'intérieur de l'élément par une fonction mathématique, appelée fonction de déplacement $\{w\}_e$. Cette fonction permet de décrire comment la forme de l'élément évolue sous l'effet des forces appliquées et est donnée sous la forme générale [35, 17] ;

$$\{w\}_e = [P] \{\delta\}_e \quad (2.86)$$

Les accolades désignent une matrice colonne, tandis que la matrice $[P]$, fonction de la position, sera déterminée pour un élément spécifique (triangulaire ou rectangulaire). Connue sous le nom de fonction de forme, elle doit représenter au mieux le champ de déplacement réel.

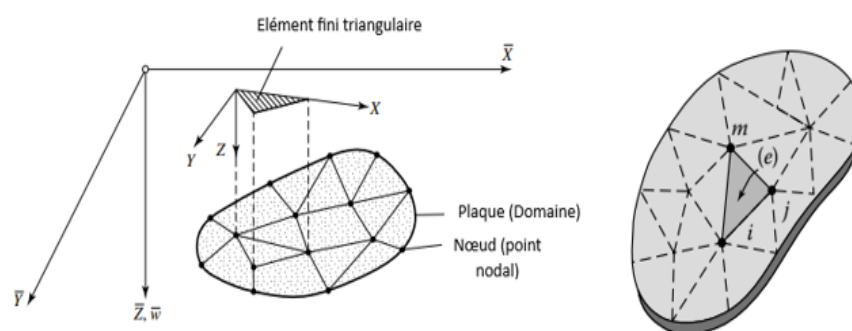


Figure 2-12 plaque divisée en éléments finis [13, 10]

✚ Matrices de déformation, contrainte et élasticité

En nous référant aux Équations 1.5, nous définissons, pour assurer une certaine uniformité dans l'analyse par éléments finis de divers types de problèmes, une matrice généralisée de déformation-déplacement. Cette matrice permet de relier les déplacements des nœuds aux déformations subies par l'élément, facilitant ainsi le calcul des contraintes internes et des efforts mécaniques appliqués [10].

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.87a)$$

Ou bien ;

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}\}_e \quad (2.87b)$$

Dans laquelle [B] reste également à déterminer.

La relation entre les contraintes et la déformation généralisée, issue des Équations 1.8, est la suivante :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}_e = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e \quad (2.88a)$$

En résumé,

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_e = z[\mathbf{D}^*] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e \quad (2.88b)$$

Les moments sont liés aux contraintes par les équations 1.10.

$$\{\mathbf{M}\}_e = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_e = \int_{-t/2}^{t/2} \{\boldsymbol{\sigma}\}_e z dz \quad (2.89a)$$

En remplaçant les équations 2.88b dans ce qui précède, on obtient les relations suivantes entre les moments et la déformation généralisée.

$$\{\mathbf{M}\}_e = \left(\int_{-t/2}^{t/2} [\mathbf{D}^*] z^2 dz \right) \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e \quad (2.90a)$$

Ou,

$$\{\mathbf{M}\}_e = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e \quad (2.90b)$$

La matrice d'élasticité pour une plaque isotrope est donc la suivante :

$$[D] = \frac{t^3}{12} [D^*] = \frac{Et^3}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

2.3.3.3 Formulation générale de la méthode des éléments finis

Une approche courante pour dériver les expressions principales et les caractéristiques de la méthode des éléments finis repose sur le principe de l'énergie potentielle. La variation de l'énergie potentielle $\Delta\Pi$ de l'ensemble de la plaque illustrée à la [Figure 2-12](#), à partir de l'Équation 3.52 de [10, 36, 37], est :

$$\Delta\Pi = \sum_1^n \iint_A (M_x \Delta\varepsilon_x + M_y \Delta\varepsilon_y + 2M_{xy} \Delta\gamma_{xy}) dx dy - \sum_1^n \iint_A (p \Delta w) dx dy = 0 \quad (2.92a)$$

Où n , A , et p représentent respectivement le nombre d'éléments de même épaisseur composant la plaque, la surface d'un élément et la charge latérale par unité de surface. L'Équation 2.92a peut être réécrite comme suit :

$$\sum_1^n \iint_A (\{\Delta\varepsilon\}_e^T \{M\}_e - p \Delta w) dx dy = 0 \quad (2.92b)$$

Dans cette équation, l'exposant T désigne la transposée d'une matrice. En introduisant les Équations 2.86, 2.87 et 2.90 dans l'Équation 2.92b, on obtient :

$$\sum_1^n \{\Delta\varepsilon\}_e^T ([K] \{\delta\}_e - \{Q\}_e) = 0 \quad (2.93)$$

La matrice de rigidité de l'élément, notée $[k]_e$, est calculée comme suit :

$$[k]_e = \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy = 0 \quad (2.94)$$

La matrice des forces nodales de l'élément, notée $\{Q\}_e$ due à la déformation initiale et à la charge transversale, est calculée comme suit :

$$\{Q\}_e = \iint_A [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy + \iint_A [p]^T p dx dy \quad (2.95)$$

Puisque les variations dans $\{\delta\}_e$ sont indépendantes et arbitraires, l'équation 2.93 mène à l'expression suivante :

$$[k]\{\delta\}_e = \{Q\}_e \quad (2.96)$$

Pour l'équilibre des forces nodales de l'élément. Nous assemblons maintenant l'équation 2.93 pour obtenir :

$$\{\Delta\delta\}^T ([k]\{\delta\} - \{Q\}) = 0 \quad (2.97)$$

Cela doit être vrai pour toutes les variations $\{\Delta\delta\}$. Cela nous donne donc les équations qui régissent le comportement de la plaque dans son ensemble :

$$[k]\{\delta\} = \{Q\} \quad (2.98)$$

Avec ;

$$[K] = \sum_1^n [k]_e \quad ; \quad \{Q\} = \sum_1^n \{Q\}_e$$

Voici un résumé simplifié de la procédure générale pour résoudre un problème de flexion d'une plaque (ou d'une poutre ou d'une coque) avec la méthode des éléments finis [15]:

- 1) Calculez la matrice de rigidité de l'élément $[k]_e$ à partir de l'Équation 2.94 en fonction des propriétés de l'élément donné. Ensuite, obtenez la matrice de rigidité globale $[K]$ en sommant toutes les matrices $[k]_e$: $[K] = \sum [k]_e$.
- 2) Calculez la matrice des forces nodales $\{Q\}_e$ à partir de l'Équation 2.95 en fonction des charges appliquées. Puis, obtenez la matrice des forces nodales globales $\{Q\}$ en sommant toutes les matrices $\{Q\}_e$: $\{Q\} = \sum \{Q\}_e$.
- 3) Déterminez les déplacements nodaux $\{\delta\}$ en résolvant l'Équation 2.97 en satisfaisant les conditions aux limites : $\{\delta\} = [K]^{-1}\{Q\}$

Ensuite, calculez le moment de chaque élément $\{M\}_e$ à partir de $\{M\}_e = [D]\{\varepsilon\}_e$, et les contraintes de l'élément à partir des Équations 2.88.

Cette procédure permet de résoudre le problème de déformation de la plaque sous charges appliquées, en tenant compte de la rigidité, des forces, des déplacements, des moments et des contraintes dans chaque élément.

2.3.3.4 Élément fini rectangulaire à 4 nœuds

Considérons un élément rectangulaire $ijkm$ situé dans le plan xy (voir Figure 2-13a), avec une numérotation des nœuds dans le sens antihoraire. Chaque nœud présente trois degrés de liberté : un déplacement selon z (w) et deux rotations autour des axes x (θ_x) et y (θ_y), qui sont directement liées aux pentes de la plaque de la manière suivante [10]:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} ; \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.99)$$

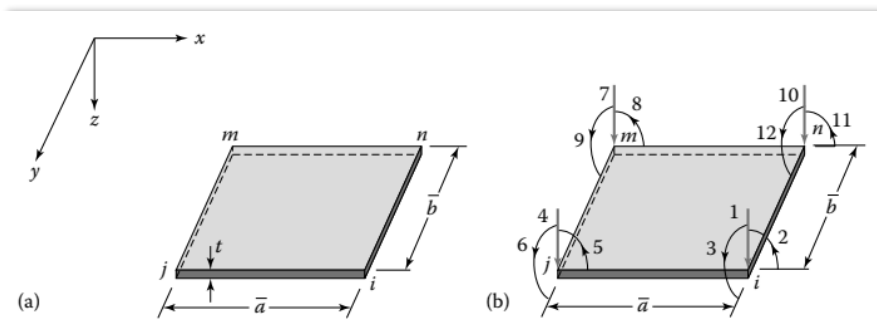


Figure 2-13 (a) Elément fini rectangulaire [15]

🚦 Fonction de déplacement

La matrice des déplacements nodaux de l'élément est représentée par :

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, w_m, \theta_{xm}, \theta_{ym}, w_n, \theta_{xn}, \theta_{yn}\} \quad (2.100)$$

L'expression polynomiale suivante est choisie pour le déplacement de l'élément $ijmn$ [5, 17] :

$$w_e = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (2.101)$$

La fonction de déplacement choisie simplifie l'analyse tout en assurant la continuité des déplacements, mais pas celle des pentes aux interfaces. Bien qu'elle ne préserve pas la continuité des pentes (élément non compatible), elle reste suffisamment précise pour la plupart des applications en ingénierie [35]. Une approche plus avancée, avec un polynôme de 18^e ordre pour un triangle à six nœuds, améliorerait la précision mais compliquerait considérablement l'analyse [17].

Les déplacements aux nœuds, après avoir inséré les Équations 2.101 et 2.99 dans l'Équation 2.100, sont obtenus et peuvent être exprimés de manière simplifiée :

$$\{\delta\}_e = [C]\{\alpha\} \quad (2.103a)$$

La matrice [C] est de taille 12×12 et dépend des coordonnées des nœuds, comme montré dans [10]. En inversant cette matrice, on peut trouver les valeurs des coefficients inconnus $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{12}$

$$\{\alpha\} = \{\delta\}_e [C]^{-1} \quad (2.103b)$$

La fonction de déplacement peut désormais être exprimée sous la forme de l'équation 2.86 :

$$\{w\}_e = [P]\{\delta\}_e = \{\delta\}_e [L][C]^{-1} \quad (2.104)$$

Avec ;

$$[L] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3] \quad (2.105)$$

En introduisant l'Équation 2.101 dans les Équations 2.87, nous obtenons :

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{12}\} \quad (2.106a)$$

Ou de manière concise ;

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (2.106b)$$

Nous pouvons déterminer la matrice généralisée "déformation"-déplacement en insérant l'Équation 2.103 dans les Équations 2.106, et par là on a :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta}\}_e = [\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\delta}\}_e \quad (2.107)$$

On obtient donc ;

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{H}] \quad (2.108)$$

✚ La matrice de rigidité

En substituant [B] de l'Équation 2.108 dans l'Équation 2.94, on obtient [15]:

$$[\mathbf{k}]_e = \frac{Et^3}{108\bar{a}\bar{b}(1-\nu^2)} [\mathbf{R}] \left\{ [k_1] + [k_2] + \nu[k_3] + \frac{1-\nu}{2}[k_4] \right\} \quad (2.109)$$

Les expressions explicites des coefficients de rigidité en flexion $[k_1]$ à $[k_4]$ et de la matrice $[\mathbf{R}]$ sont données dans [17]. Ces coefficients fournissent généralement une convergence rapide et une précision satisfaisante [15].

✚ Forces nodales externes

La matrice des forces nodales de l'élément est [10]:

$$\{\mathbf{Q}\}_e = \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_m \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

Une fois que la matrice de rigidité et la matrice des forces nodales pour un élément fini donnée (rectangulaire dans cas avec 3 degrés de liberté sur chaque nœud), il est maintenant possible d'utiliser la relation (2.98) pour calculer le déplacement nodal pour un maillage donné.

Les calculs pour cette Méthode des Éléments Finis sont appliqués dans le cadre de ce travail en utilisant le logiciel Abaqus.

2.3.4 Présentation du logiciel ABAQUS

L'application de la Méthode des Éléments Finis (MEF) à des problèmes d'ingénierie comme la flexion de plaques implique la gestion de calculs complexes, notamment la formulation précise des éléments finis et la résolution efficace de systèmes d'équations de très grande taille. Mettre en œuvre manuellement ou développer soi-même un code capable de réaliser ces opérations de manière fiable et polyvalente représente un travail considérable qui dépasse souvent le cadre d'un projet académique. Face à cette complexité, l'utilisation d'un logiciel spécialisé et validé tel qu'Abaqus constitue une solution pertinente. Ce logiciel fournit une plateforme robuste intégrant des bibliothèques d'éléments finis testés et des solveurs performants, permettant de se concentrer sur la modélisation du problème physique, l'application de la méthode et l'analyse des résultats sans avoir à développer les algorithmes fondamentaux de la MEF

2.3.4.1 Les logiciels sur les marchés

Sur le marché, on trouve de nombreux logiciels de CAO et de calcul (Nastran, Catia, ABAQUS, SolidWorks) couvrant trois étapes clés [38]:

- Modélisation de la structure (géométrie, matériaux, charges)
- Simulation du comportement (déformations, ruptures, plastification...)
- Post-traitement des résultats pour obtenir des données exploitables

En entreprise, on combine souvent plusieurs de ces outils selon leurs points forts (ex. dessin sous Catia, post-traitement sous Nastran).

Dans le cadre de ce travail, c'est ABAQUS qui sera mobilisé pour l'analyse par éléments finis de la plaque étudiée.

2.3.4.2 Caractéristiques du logiciel Abaqus

ABAQUS, initialement développé par Hibbit, Karlsson & Sorensen (HKS) depuis les débuts de la théorie des éléments finis, a évolué pendant plus de 30 ans pour intégrer les avancées théoriques et les besoins industriels, avant d'être racheté par Dassault Systèmes (SIMULIA) en octobre 2005 [39, 38].

Ce progiciel de simulation par éléments finis de problèmes très variés en mécanique se compose de trois volets principaux [40]:

- ABAQUS/Standard, solveur implicite généraliste,
- ABAQUS/Explicit, solveur explicite adapté aux problèmes dynamiques ou quasi-statiques non linéaires,
- ABAQUS/CAE, interface graphique intégrée pour la modélisation, le lancement des calculs et la visualisation des résultats.

Chacun de ces produits peut être enrichi de modules optionnels ciblant des applications spécifiques. Le code cœur est écrit en C++ et Fortran, tandis que Python assure la gestion des scripts et paramétrages, et FOX Toolkit prend en charge l'interface utilisateur.

Réputé pour ses performances sur les problématiques non linéaires (notamment la modélisation d'élastomères), ABAQUS est largement employé dans l'automobile, l'aéronautique et le milieu universitaire.

Le workflow classique comprend [41]:

- Prétraitement : création du fichier de données. **inp** (géométrie, maillage, matériaux, chargements, etc.) – soit manuellement, soit via ABAQUS/CAE ou un autre logiciel.
- Calcul : exécution du “moteur de calcul” à partir du **inp** pour générer la base de résultats. **odb**.
- Post-traitement : exploitation et visualisation des résultats, directement dans ABAQUS/CAE ou via des outils tiers.

2.3.4.3 Organisation de l'interface Abaqus CAE (complète Abaqus environnement)

Il est important de savoir que le module CAE (Figure 2-14) que vous allez utiliser pour créer votre jeu de données est relativement récent (quelques années) et qu'il est plutôt destiné à la mise en données de problèmes relativement classiques. Donc pas toutes les commandes utilisables dans Abaqus et fait souvent le choix de paramètres par défaut [38].

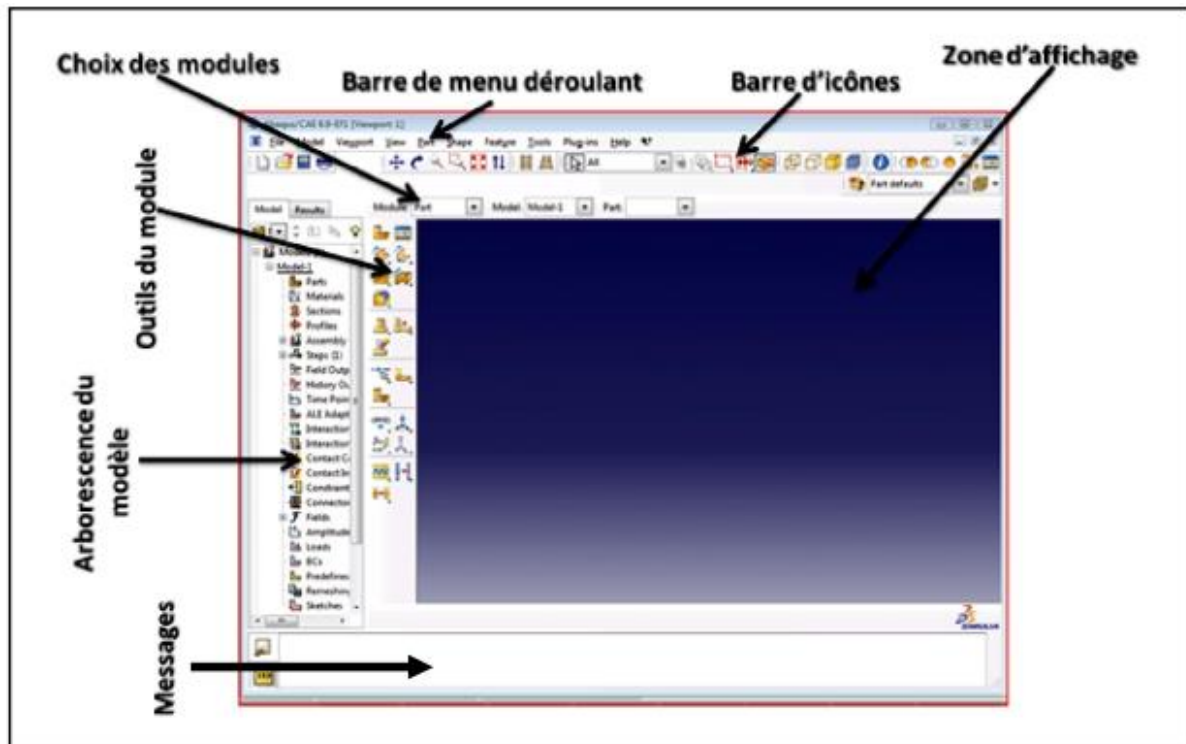


Figure 2-14 Organisation d'Abaqus [38]

2.3.4.4 Les Modules d'ABAQUS CAE

ABAQUS CAE est structuré en plusieurs unités fonctionnelles appelées modules, chacune dédiée à une étape spécifique du processus de modélisation. Voici un aperçu des principaux modules [41, 38]:

Module PART

Ce module permet de créer les objets géométriques nécessaires à l'étude, soit en les dessinant directement dans ABAQUS CAE, soit en les important depuis un logiciel de CAO tiers.

Module PROPERTY

Le module Property sert à définir les propriétés matérielles et physiques des objets géométriques ou de certaines de leurs parties.

Module ASSEMBLY

Il permet de rassembler tous les objets géométriques dans un même système de coordonnées global. Un modèle dans ABAQUS ne peut contenir qu'un seul assemblage.

Module STEP

Ce module est dédié à la définition des étapes de l'analyse et des paramètres de post-traitement. On y détermine, par exemple, la durée d'application d'une force ou les moments auxquels certaines conditions sont activées.

Module INTERACTION

Ce module permet de spécifier les interactions entre différentes parties ou régions du modèle, qu'elles soient mécaniques, thermiques, ou autres. Il est important de noter qu'ABAQUS ne considère que les interactions explicitement définies ; la proximité géométrique seule n'est pas suffisante .

Module LOAD

Ici, on définit les chargements, conditions limites et champs (température, pression, etc.). Ces éléments sont liés aux étapes définies dans le module STEP ; par exemple, une force peut être active à l'étape 1 et désactivée à l'étape 2.

Module MESH

Ce module contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage par éléments finis sur l'assemblage, étape cruciale pour toute simulation numérique.

Module JOB

Une fois la modélisation terminée, le module Job permet de lancer les calculs. ABAQUS effectue alors les simulations et produit les résultats d'analyse.

Module VISUALIZATION

Ce module est destiné à la visualisation des résultats : déformations, contraintes, courbes de chargement, etc. Il permet d'interpréter graphiquement les résultats de l'analyse.

Module SKETCH

Il sert à créer des formes bidimensionnelles indépendantes des objets 3D. Ces esquisses peuvent ensuite être utilisées pour des opérations telles que des extrusions.

2.3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la méthodologie utilisée pour l'analyse de la déformation d'une plaque rectangulaire sous différentes méthodes. Nous avons détaillé les approches analytiques (Navier et Lévy) et numériques (éléments finis et différences finies), en expliquant les formulations mathématiques nécessaires pour résoudre les équations de déformations dans divers scénarios

La présentation de ces méthodologies visait à établir le cadre de l'application numérique qui sera réalisée, en vue de la comparaison des résultats. Les calculs basés sur les méthodes analytiques seront implémentés numériquement via MATLAB, tandis que la MEF à l'aide d'un logiciel commercial reconnu tel qu'Abaqus

Chapitre 3 Résultats et discussions

3.1 Introduction

Après avoir présenté les fondements théoriques relatifs au comportement des plaques et détaillé les formulations des approches analytiques et numériques dans les chapitres précédents, ce chapitre est consacré à la présentation et à la discussion des résultats issus de l'application numérique menée dans le cadre de ce travail.

Cette application a consisté à analyser une plaque rectangulaire en acier soumise à une charge uniformément répartie. Les méthodes d'analyse étudiées (méthodes analytiques, Méthode des Éléments Finis et Méthode des Différences Finies) ont été appliquées à deux configurations de conditions aux limites spécifiques : la plaque simplement appuyée sur ses quatre bords (SSSS) et la plaque avec deux bords opposés simplement appuyés et deux autres encastres (SSCC). Les résultats obtenus pour chaque méthode et chaque cas d'étude seront présentés et comparés. L'objectif principal de ce chapitre est d'analyser ces résultats, d'évaluer la précision des méthodes numériques par rapport aux solutions analytiques et de discuter de leur performance respective.

3.2 Hypothèses de calcul

3.2.1 Application Numérique

Dans cette rubrique, nous étudions la déformation d'une plaque mince carrée en acier de dimension finies ($a = b$), de masse M et d'épaisseur h caractérisée par son module d'élasticité et son coefficient de poisson repris dans le *Tableau 3-1*;

Tableau 3-1 Caractéristiques de la plaque en acier

Propriétés	Valeur	Unité
Module d'élasticité E	210	GPa
Coefficients de poisson ν	0,3	–
Epaisseur de la plaque h	12	mm
Largeur de la plaque $a=b$	1500	mm

On considère les conditions suivantes :

- 1) Conditions de chargement : La plaque est soumise à une charge uniformément répartie $-p_z (p = p_0 = 5KN/m^2)$
- 2) Conditions aux limites :
 - La plaque (1) est simplement appuyée sur ses 4 bords (voir Figure 3-2)
 - La plaque (2) a deux bords opposés simplement appuyés et deux autres encastres (Voir Figure 3-1)
 (Voir Figure 3-1)

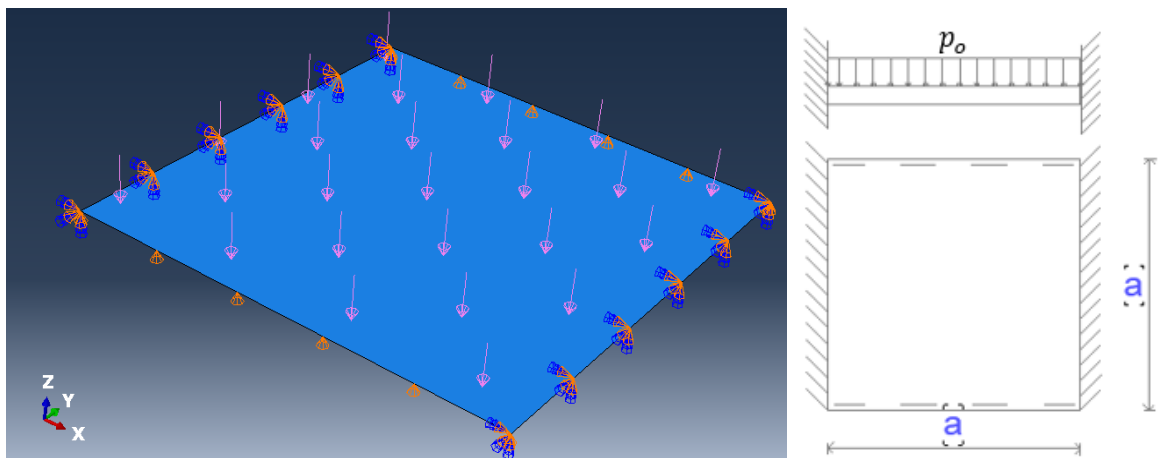


Figure 3-1 Modélisation sous ABAQUS (à gauche) d'une plaque carrée avec deux bords simplement appuyés et deux bords encastres, soumise à une charge uniformément répartie p_0 (Plaque 2).

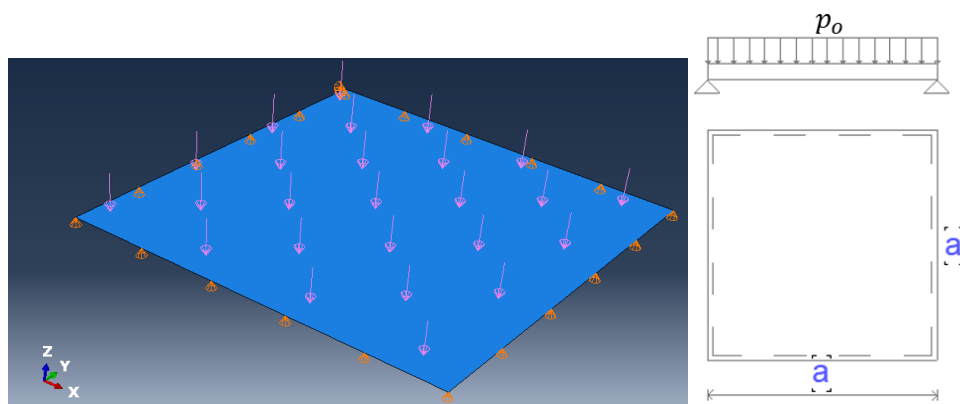


Figure 3-2 Modélisation sous ABAQUS (à gauche) d'une plaque carrée avec quatre bords simplement appuyés, soumise à une charge uniformément répartie p_0 (Plaque 1)

3.2.2 Analyse avec les méthodes Analytiques

Cette section est dédiée à l'analyse des résultats obtenus par les méthodes analytiques classiques de Navier et de Lévy. Nous allons présenter les résultats calculés pour les deux configurations de plaques étudiées dans ce mémoire : la plaque simplement appuyée sur ses quatre bords (SSSS) et la plaque avec conditions aux limites mixtes (SSCC).

L'analyse des méthodes analytiques de Navier et de Lévy, qui fournissent les solutions exactes pour des cas spécifiques de plaques, nécessite l'évaluation de la convergence de leurs solutions.

Ici ; Pour évaluer la convergence des solutions analytiques, qui sont obtenues en sommant un nombre croissant ou décroissant de termes d'une série, nous allons considérer un indicateur spécifique ω . Cet indicateur, appelé taux d'écart (ou taux de convergence), quantifie la différence relative entre la flèche cumulée (la somme partielle des termes de la série à une étape donnée) et la valeur analytique exacte vers laquelle la série converge.

Le taux d'écart ω est calculé en pourcentage selon la formule suivante :

$$\omega (\%) = \frac{W_{cumulée} - W_{max,exact}}{W_{max,exact}} \times 100$$

L'analyse de l'évolution de ce taux d'écart avec l'augmentation du nombre de termes de la série nous permettra d'apprécier la vitesse et la nature de la convergence pour chaque méthode et configuration de plaque, la convergence vers la solution exacte étant caractérisée par un taux d'écart tendant vers 0 %.

1) Méthode de Navier

Pour appliquer la méthode de Navier et calculer la flèche maximale de la plaque (1), un script a été développé sous l'environnement de calcul MATLAB. Ce script implémente la solution en série double donnée par l'équation (2.22) et permet d'évaluer numériquement la somme de cette série. Le script lit les paramètres de la plaque (dimensions a, b , épaisseur h , module de Young E , coefficient de Poisson ν) et l'intensité de la charge uniformément répartie p_0 . Il calcule ensuite la rigidité en flexion D selon l'équation (1.11). La flèche $w(x, y)$ est calculée en sommant les termes de la série de Navier (équation 2.21) pour un nombre spécifié de termes m et n . Pour obtenir la flèche maximale, le script évalue cette série au centre de la plaque ($x = a/2, y = b/2$) et donne la figure de la représentation 3D de la déformation de la plaque après application de la charge (Figure 3-3).

Les résultats présentés dans le **Tableau 3-2** correspondent à la somme de la série de Navier en considérant les termes pour m et n variant de 1 à 9 (uniquement les valeurs impaires, conformément à l'équation 2.22 pour une charge uniforme), soit un total de $5 \times 5 = 25$ termes : montrant ainsi la contribution de chaque terme (m, n) à la somme et la somme cumulée de la série à mesure que l'on considère de plus en plus de termes. La convergence de la solution est également illustrée par le calcul de ω en pourcentage.

- La colonne *flèche partielle* indique la valeur de la flèche calculée pour le terme (m, n) spécifique de la série de Navier.
- La colonne *flèche cumulée* représente l'approximation de la flèche maximale obtenue en additionnant tous les termes de la série depuis $(m = 1, n = 1)$ jusqu'au terme (m, n) de la ligne considérée.

Le code source complet du script MATLAB utilisé pour cette analyse est disponible en Annexe.

Tableau 3-2 Résultats des déplacements verticaux avec la méthode de Navier pour la plaque (1)

m	n	<i>Flèche partielle</i> [mm] $\mu U_{m,n}$	<i>Flèche cumulée</i> [mm] $\sum_{m,n} \mu U_{m,n}$	$\omega(\%)$
1	1	3.1692419889	3,169241989	2,41961347
3	1	-0.0422565599	3,126985429	1,05401862
5	1	0.0037505822	3,130736011	1,17522526
7	1	-0.0007243982	3,130011613	1,15181506
9	1	0.0002094813	3,130221094	1,15858482
1	3	-0.0422565599	3,087964534	-0,20701003
3	3	0.0043473827	3,092311917	-0,06651673
5	3	-0.0007310824	3,091580835	-0,09014294
7	3	0.0001794486	3,091760283	-0,08434374
9	3	-0.0000579651	3,091702318	-0,08621699
1	5	0.0037505822	3,0954529	0,03498965
3	5	-0.0007310824	3,094721818	0,01136344
5	5	0.0002028315	3,09492465	0,0179183
7	5	-0.0000661430	3,094858507	0,01578077
9	5	0.0000250721	3,094883579	0,01659102
1	7	-0.0007243982	3,09415918	-0,00681918
3	7	0.0001794486	3,094338629	-0,00101998
5	7	-0.0000661430	3,094272486	-0,00315751
7	7	0.0000269381	3,094299424	-0,00228696
9	7	-0.0000119066	3,094287518	-0,00267174
1	9	0.0002094813	3,094496999	0,00409802

3	9	-0.0000579651	3,094439034	0,00222477
5	9	0.0000250721	3,094464106	0,00303502
7	9	-0.0000119066	3,094452199	0,00265024
9	9	0.0000059635	3,094458163	0,00284296

Les quantités $\mu U_{m,n}$ et $\sum_{m,n} \mu U_{m,n}$ sont définies à la section 2.2.2.3 par les équations 2.23 et 2.24

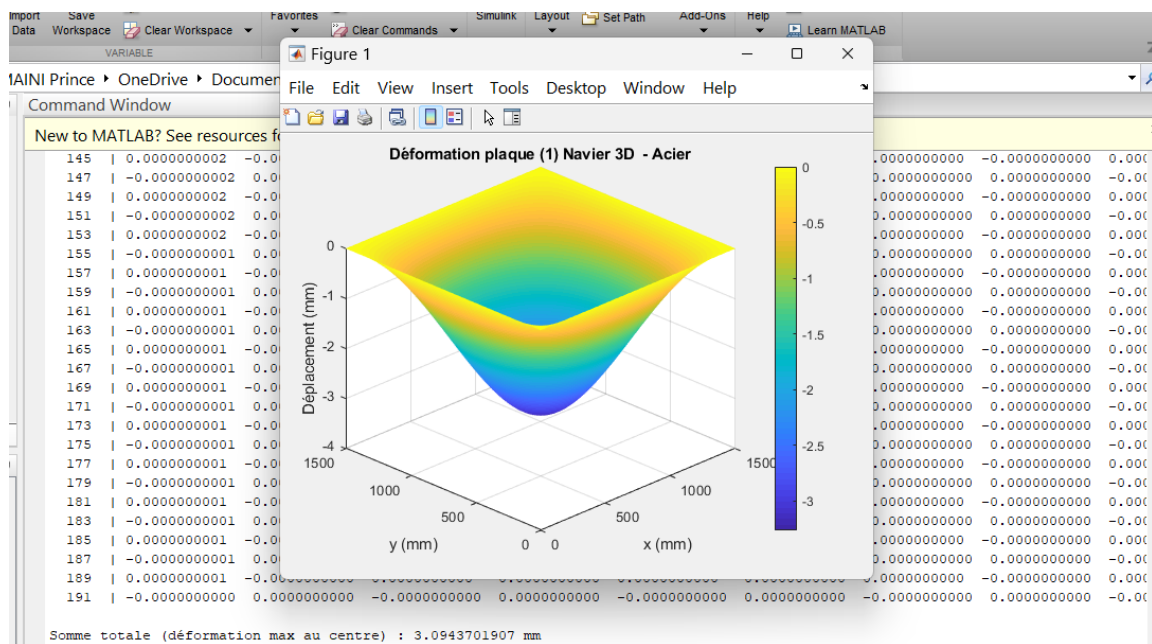


Figure 3-3 Déformation de la plaque (1) après application de la charge avec la méthode de Navier sous MATLAB

2) Méthode de Lévy

• Cas de la plaque (1)

L'analyse de la plaque (1) par la méthode de Lévy a été menée aussi numériquement en développant un script sous l'environnement MATLAB, implémentant la solution en série simple donnée par l'équation (2.46a). Ce script calcule les termes successifs de la série de Lévy au centre de la plaque (voir la colonne « flèche partielle » du **Tableau 3-3**) en $x = a/2, y = 0$, évalue la somme cumulée à chaque étape (voir la colonne « flèche cumulée » du **Tableau 3-3**)

et donne la représentation 3D de la plaque chargée déformée comme l'illustre la *Figure 3-4*. Il permet ainsi d'observer la convergence de la série. Le *Tableau 3-3* présente les résultats de cette évaluation pour les 6 premiers termes de la série ($m = 1, 3, 5, \dots, 11$).

Le code source complet du script MATLAB pour la méthode de Lévy est également disponible en Annexe.

Tableau 3-3 Résultats des déplacements verticaux avec la Méthode de Lévy pour la plaque (1)

m	<i>Flèche partielle [mm]</i> βV_m	<i>Flèche cumulée [mm]</i> $\sum_{m,n} \beta V_m$	$\omega(\%)$
1	3,091912079	3.091912079	-0,0794382
3	0,002470172	3.094382251	0,00038974
5	$-1,2187E - 05$	3.094370064	$-4,1042E - 06$
7	$1,29E - 07$	3.094370193	$6,4634E - 08$
9	$-2E - 09$	3.094370191	0
11	0	3.094370191	0

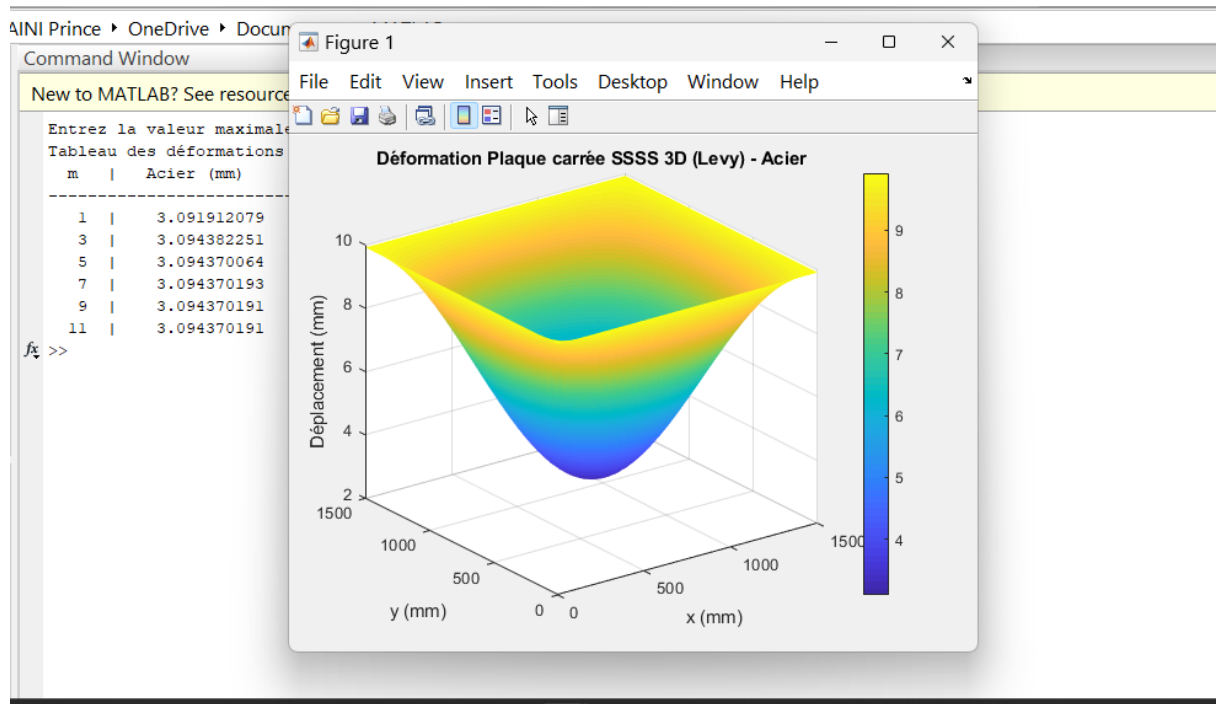


Figure 3-4 Déformation de la plaque avec la méthode de Lévy sous MATLAB

Les quantités βV_m et $\sum_{m,n} \beta V_m$ sont définies avec les équations (2.47a-b) du second chapitre et l'erreur se calcule avec la même formule présentée précédemment

Commentaire 1 : Convergence des méthodes Analytiques (Navier vs. Lévy) pour la plaque SSSS

L'analyse de la convergence pour la plaque (1) SSSS révèle des différences notables entre les méthodes de Navier et de Lévy. Les résultats obtenus montrent que la méthode de Lévy approche la solution exacte beaucoup plus rapidement. Son taux d'écart devient négligeable (proche de 0 %) dès l'utilisation de 6 termes, et la valeur cumulée se stabilise de manière significative à partir du 5^e terme de la série. En comparaison, la méthode de Navier présente une convergence plus lente ; son taux d'écart nécessiterait un nombre plus important de termes (jusqu'à 25 termes pour atteindre un taux d'écart plus important, indiquant une précision inférieure) pour s'approcher de la solution exacte, et la stabilisation véritable de la somme cumulée n'est observée qu'avec l'utilisation d'un très grand nombre de termes, comme 9216

selon l'observation avec le script. Ainsi, en termes de vitesse de convergence vers la solution exacte (un taux d'écart tendant vers 0 %), la méthode de Lévy se révèle significativement plus efficace sur le plan computationnel pour ce problème spécifique.

Il est à noter que les deux méthodes tendent vers une valeur similaire de la déformation maximale, $w_{max,exact} = 3.094370191mm$, ce qui renforce la confiance dans la validité des résultats. Toutefois, la supériorité de la méthode de Lévy en termes de rapidité et de précision est clairement établie.

- **Cas de la plaque (2)**

La plaque (2) ne peut pas être analysée par la méthode de Navier vu ses conditions aux limites : deux bords opposés simplement appuyés et deux autres encastées, par conséquent l'analyse se fait uniquement avec la méthode de Lévy dans ce cas

Le calcul du déplacement maximal dans ce dernier cas, a été aussi réalisé sous l'environnement MATLAB (code en Annexe) où on a développé un script qui décompose le problème complexe SSCC en deux sous-problèmes plus simples (un SSSS sous charge et un SSSS sous moments de bord), résout chaque sous-problème en utilisant les séries de Lévy, et superpose les résultats pour obtenir la solution finale pour la plaque SSCC, tout en suivant la convergence de la série comme explicité au second chapitre, section 2.2.3.2.

Ainsi le résultat de l'analyse pour les 6 premiers termes des séries, sont présentés dans le **Tableau 3-4** où :

- m : Cette colonne indique le nombre de termes (uniquement les termes impairs $m=1,3,5,\dots$) pris en compte dans la série de Fourier utilisée par la méthode de Lévy. Plus m augmente, plus l'approximation s'affine.
- w_1 : Cette colonne représente la contribution au déplacement maximal provenant de la première partie de la solution par superposition : une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords soumise à la charge uniformément répartie p_0 . Les valeurs proviennent du calcul basé sur la série de Lévy pour le cas SSSS (similaire au **Tableau 3-3**, mais ici utilisée comme partie du calcul pour la plaque 2).

- w_2 : Cette colonne représente la contribution au déplacement maximal provenant de la seconde partie de la solution par superposition donnée à l'équation 2.62b : une plaque simplement appuyée sur ses deux bords et soumise à des moments sur les deux autres bords encastres, calculée pour annuler la rotation induite par la charge dans la première partie. Les valeurs sont négatives car elles "contrecarrent" la déformation de w_1 .
- w_{max} : Cette colonne montre le déplacement vertical maximal résultant au centre de la plaque 2. Il est obtenu en faisant la somme cumulée des contributions w_1 et w_2 pour chaque valeur de m , selon le principe de superposition $w_{max} = w_1 + w_2$.

Le taux d'écart est aussi calculé ici.

Tableau 3-4 Résultats des déplacements verticaux avec la méthode de Lévy pour la plaque (2)

m	w_1	w_2	$w_{max} = w_1 + w_2$ [mm]	$\omega(\%)$
1	3.091912079	-1.635769448	1.456142631	-0,28605533
3	3.094382251	-1.634040630	1.460341621	0,00148372
5	3.094370064	-1.634050235	1.460319719	-1,6092E - 05
7	3.094370193	-1.634050237	1.460319958	2,7391E - 07
9	3.094370191	-1.634050237	1.460319954	0
11	3.094370191	-1.635769448	1.460319954	0

Commentaire 2 : Convergence de la méthode de Lévy pour la plaque (2) SSCC

L'analyse par la méthode de Lévy pour la plaque avec deux bords encastres et deux simplement appuyés (SSCC) révèle une convergence extrêmement rapide des déplacements verticaux avec l'augmentation du nombre de termes (m). Le taux d'écart par rapport à la solution exacte est

très faible dès le second terme de la série ($m=3$), indiquant que les valeurs cumulées sont déjà très proches de la solution convergée. Le taux d'écart devient négligeable (proche de 0 %) après seulement quelques termes, démontrant ainsi l'efficacité et la précision de la méthode de Lévy pour ce type de problème avec des conditions aux limites mixtes. Cela permet d'obtenir des résultats fiables avec un faible effort computationnel.

La valeur exacte convergée pour la plaque 2 est d'environ 1.460319954 mm (selon les résultats du Tableau 3-4).

3.2.3 Analyse avec les méthodes numériques~

Après avoir établi les solutions de référence par les méthodes analytiques pour les plaques (1) : $w_{max,exact} = 3.094370191mm$ et (2) : $w_{max,exact} = 1.460319954 mm$, cette section présente les résultats obtenus en appliquant les approches numériques. Les deux méthodes numériques couramment utilisées en mécanique des structures, la Méthode des Différences Finies (MDF) et la Méthode des Éléments Finis (MEF) implémentée via le logiciel spécialisé Abaqus, ont été appliquées aux deux configurations de plaque étudiées dans ce travail.

3.2.3.1 Méthode de différences finies

- *Cas de la plaque (1)*

L'analyse de la déformation de la plaque (1), qui est simplement appuyée sur ses quatre bords (SSSS), a été menée en utilisant la Méthode des Différences Finies (MDF). Pour évaluer l'impact de la discrétisation, plusieurs maillages de différentes finesses ont été appliqués à la plaque carrée. Le **Tableau 3-5** ci-dessous résume les résultats obtenus pour le déplacement vertical maximal w_{max} au centre de la plaque en fonction du maillage utilisé

Tableau 3-5 Résultats des déplacements verticaux max à différents maillages avec la MDF pour la plaque (1) en fonction des différents maillages

Maillage	Nbre des nœuds	Nbre d'éléments	Expression de w_{max}	Flèche max -plaque (1) w_{max} [mm]
2X2	9	4	$0,003906 \frac{p_o a^4}{D}$	2,97527344
4X4	25	16	$0,004028 \frac{p_o a^4}{D}$	3,06820313
6X6	49	36	$0,004048 \frac{p_o a^4}{D}$	3,0834375
8X8	81	64	$0,004055 \frac{p_o a^4}{D}$	3,08876953
10X10	121	100	$0,004057 \frac{p_o a^4}{D}$	3,09029297

Les valeurs figurant dans la colonne "*Expression de w_{max}* " représentent les formulations analytiques approchées du déplacement maximal obtenues en appliquant la méthode des différences finies pour chaque configuration de maillage. La procédure générale d'obtention de ces expressions pour une plaque sous charge uniforme est détaillée au Chapitre 2 de ce mémoire (Section 2.3.2), avec une application spécifique et un développement des systèmes d'équations pour des maillages comme 4x4 et 8x8, couvrant les configurations de plaque SSSS et SSCC. La colonne suivante, " *w_{max}* ", donne la valeur numérique correspondante de ce déplacement en millimètres, calculée en utilisant les propriétés de l'acier et la charge spécifiées en Section 3.2.1.

- **CAS de la plaque (2)**

Poursuivant l'analyse par la Méthode des Différences Finies, le **Tableau 3-6** ci-dessous présente les résultats du déplacement maximal obtenus pour la plaque (2) en fonction du maillage utilisé :

Tableau 3-6 Résultats des déplacements verticaux à différents maillages avec la MDF pour la plaque (2)

<i>Maillage</i>	<i>Nbre des nœuds</i>	<i>Nbre d'éléments</i>	<i>Expression de w_{max}</i>	<i>MDF</i> <i>Flèche max -plaque (2)</i> <i>w_{max} [mm]</i>
2X2	9	4	$0,003125 \frac{p_o a^4}{D}$	2,38037109
4X4	25	16	$0,002466 \frac{p_o a^4}{D}$	1,87839844
6X6	49	36	$0,002203 \frac{p_o a^4}{D}$	1,67806641
8X8	81	64	$0,002088 \frac{p_o a^4}{D}$	1,59046875
10X10	121	100	$0,002029 \frac{p_o a^4}{D}$	1,54552734

L'obtention des expressions pour la colonne "Expression de w_{max} " suit la même démarche que celle présentée pour les résultats MDF de la plaque (1) SSSS ci-haut et décrite plus généralement au Chapitre 2.

Commentaire 3 : résultats de l'analyse avec MDF pour la plaque (1) et (2)

En appliquant la Méthode des Différences Finies (MDF) pour calculer la déformation maximale de nos deux plaques, nous avons pu observer comment cette méthode performe selon les conditions de support. Pour la plaque SSSS, la MDF a démontré une grande précision. En affinant le maillage, le déplacement calculé s'est rapidement approché de la vraie valeur de référence analytique. Dès les premiers maillages, un faible écart était observé, qui a diminué très rapidement. La convergence rapide et monotone pour ce cas est illustrée par la **Figure 3-5**

Pour la plaque SSCC, la MDF montre également une convergence monotone vers la valeur de référence à mesure que le maillage s'affine. Cependant, l'écart initial par rapport à la solution

exacte était nettement plus important comparé au cas SSSS, ce qui pourrait s'expliquer par la complexité de la modélisation des conditions aux limites encastées par la MDF. L'utilisation d'une méthode des différences finies d'ordre élevé pourrait potentiellement améliorer la précision initiale dans de tels cas. Malgré cet écart initial plus important, la MDF converge de manière fiable pour ce cas également (voir **Figure 3-5** également)

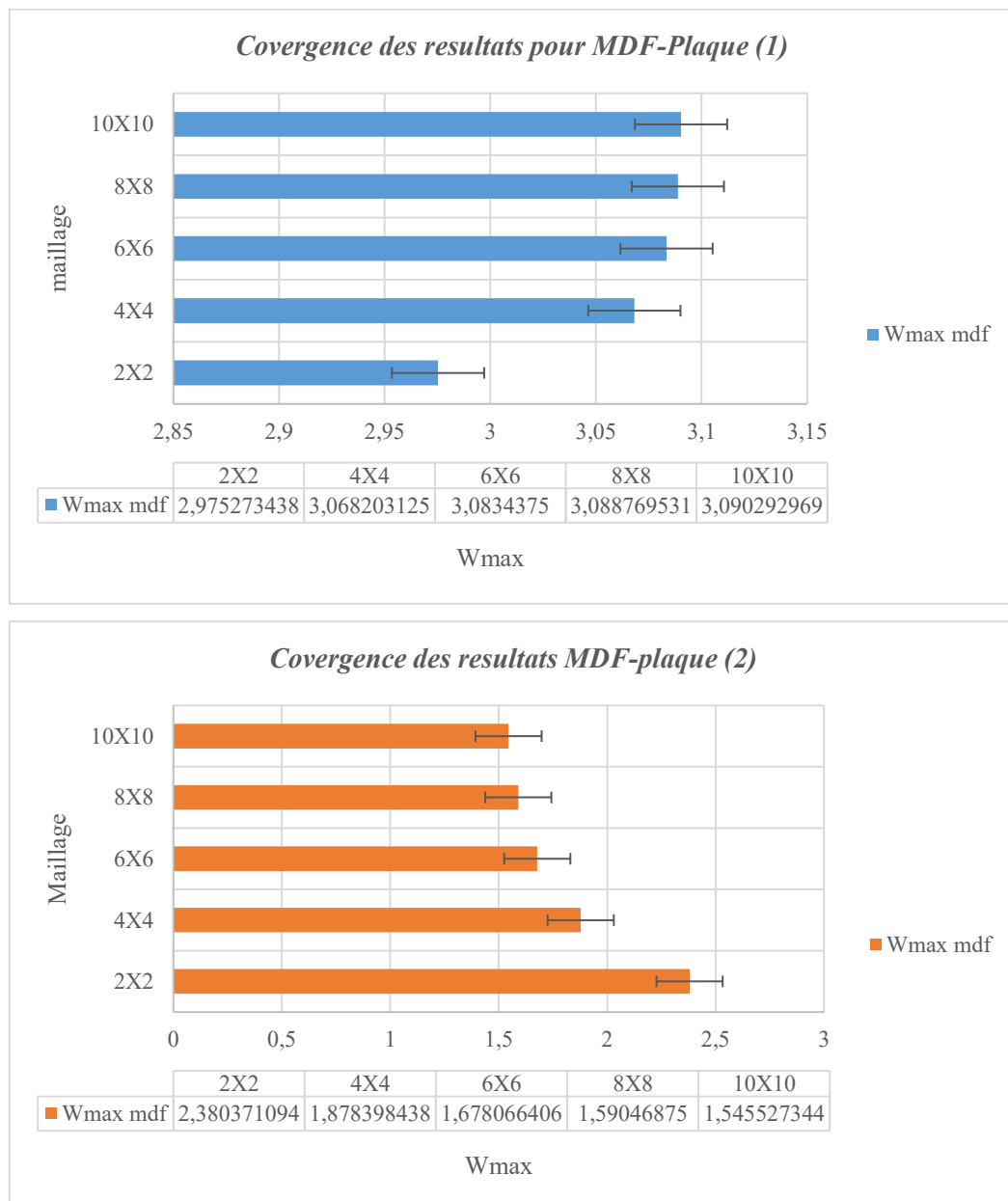


Figure 3-5 convergence des résultats avec Méthode des différences finies

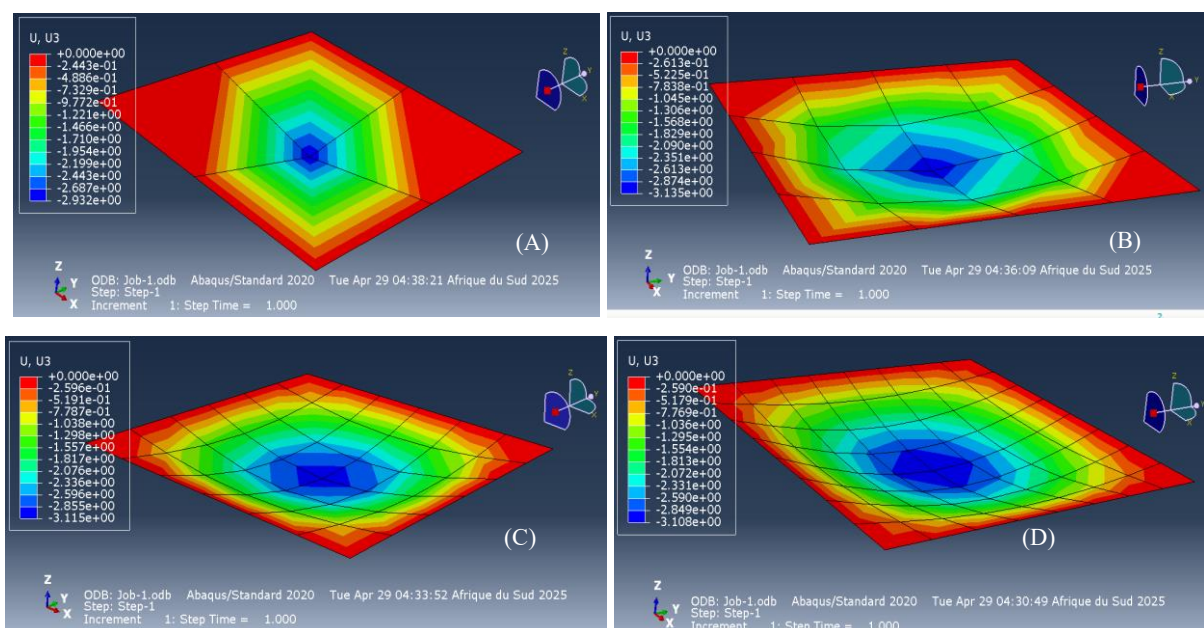
3.2.3.2 Méthodes des éléments finis

Ici, nous présentons les résultats de l'analyse pour la plaque (1) et (2) faite avec la méthode des éléments finis (MEF), en utilisant le programme Abaqus.

Cas de la plaque (1)

L'analyse de la plaque (1) simplement appuyée sur ses quatre bords (SSSS) par la Méthode des Éléments Finis a été réalisée en recourant au logiciel Abaqus. Après avoir modélisé la plaque (voir **Figure 3-2**), l'étude a été menée en utilisant différentes configurations de maillage afin d'étudier la convergence des résultats numériques et d'évaluer l'influence de la discrétisation. Les résultats visuels de cette analyse, illustrant la déformation de la plaque sous charge pour différentes finesses de maillage, sont présentés dans les **Figure 3-6a-f**. Ces figures permettent une visualisation de l'allure de la déformation tridimensionnelle et la localisation spatiale du déplacement maximal sur la surface de la plaque.

C'est à partir de ces visualisations qu'ont été extraits les principaux résultats numériques pour chaque maillage, notamment la valeur du déplacement maximal au centre de la plaque. Ces données quantitatives sont compilées et présentées de manière synthétique dans le **Tableau 3-7** ci-dessous.



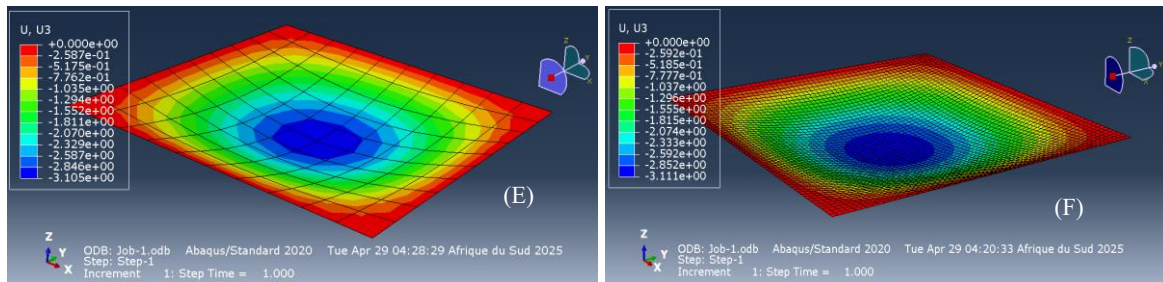


Figure 3-6 Déformation de la plaque (1) chargée sous Abaqus en considérant différents maillages : (A)maillage 2X2, (B)maillage 4X4, (C)maillage 6X6, (D)maillage 8X8, (E)maillage 10X10, (F)maillage 60X60

Tableau 3-7 Résultats des déplacements verticaux à différents maillages avec la MEF dans Abaqus pour la plaque (1)

Maillage	Nbre des nœuds	Nbre d'éléments	MEF (Sous Abaqus) Flèche max -plaque (1) w_{max} [mm]
2X2	9	4	2,931
4X4	25	16	3,135
6X6		36	3,115
8X8	81	64	3,108
10X10	121	100	3,105
15X15	256	225	3,072
30X30	961	900	3,106
60X60	3721	3600	3,111
120X120	14631	14400	3,115

Cas de la plaque 2

Passons maintenant aux résultats obtenus pour la plaque (2), posée sur deux bords et encadrée sur les deux autres (SSCC), en utilisant le programme Abaqus (voir **Figure 3-1**). La démarche de calcul par éléments finis a été la même que celle détaillée pour la plaque SSSS. Pour

visualiser la déformation de cette plaque sous charge, les *Figure 3-7a-e* montrent les images de la déformation pour différents niveaux de découpage (maillage), permettant de voir l'allure de la déformation et la localisation du déplacement maximal.

C'est à partir de ces visualisations que le déplacement maximal au centre pour chaque maillage et l'erreur associée (calculée par rapport à la valeur exacte connue), ont été relevés. Tous ces résultats numériques sont compilés dans le *Tableau 3-8* juste en dessous

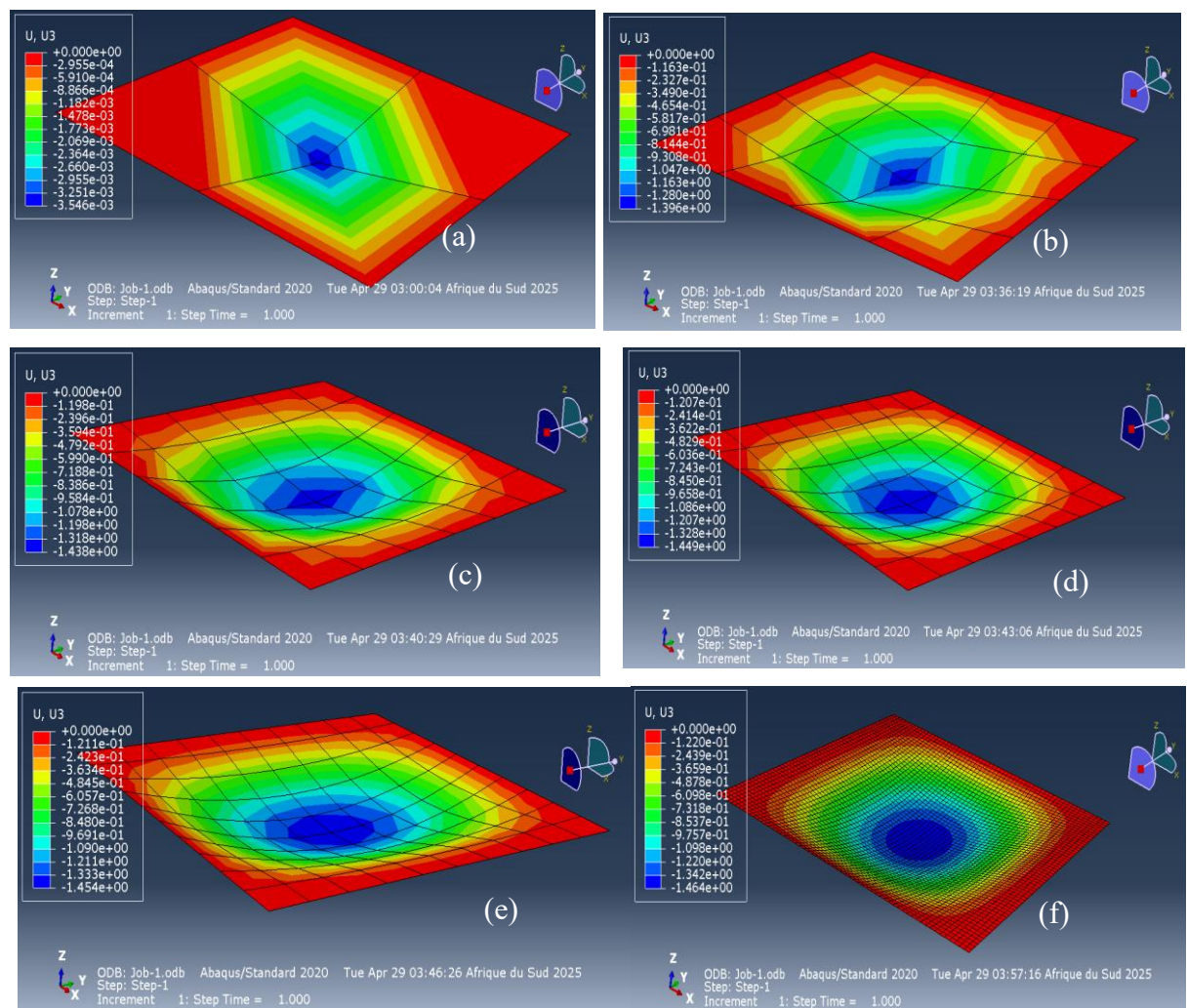


Figure 3-7 Déformation de la plaque (2) sous Abaqus en considérant différents maillages :(a) maillage 2X2, (b) maillage 4X4, (c) maillage 6X6, (d) maillage 8X8, (e) maillage 10X10, (f) maillage 60X60

Tableau 3-8 Résultats des déplacements verticaux à différents maillages avec la MEF dans Abaqus pour la plaque (2)

<i>Maillage</i>	<i>Nbre des nœuds</i>	<i>Nbre d'éléments</i>	<i>MEF (Sous Abaqus) Flèche max -plaque (2) w_{max} [mm]</i>
2X2	9	4	0,003546
4X4	25	16	1,396
6X6	49	36	1,438
8X8	81	64	1,449
10X10	121	100	1,454
15X15	256	225	1,440
30X30	961	900	1,462
60X60	3721	3600	1,464
120X120	14631	14400	1,464

Commentaire 4 ; Résultats de l'Analyse de la plaque (1) et (2)

Pour les deux configurations de plaque (SSSS et SSCC), l'analyse montre que la convergence des résultats obtenus par la Méthode des Éléments Finis (MEF) avec l'affinage du maillage n'est pas monotone. Contrairement à une convergence idéale où les résultats numériques s'approcheraient continuellement de la solution analytique, ici, les **résultats varient et peuvent même s'éloigner temporairement de la solution analytique** avant de se stabiliser pour les maillages plus fins (voir *Figure 3-8*).

Malgré ce comportement de convergence non monotone, les résultats obtenus avec les maillages les plus fins montrent que la MEF permet d'obtenir une bonne **approximation** du déplacement maximal. Pour les maillages les plus denses étudiés, les résultats numériques se **stabilisent autour d'une certaine valeur** pour les deux cas SSSS et SSCC. La stabilité des résultats pour les maillages

très fins indique que la solution numérique a convergé vers une valeur. Ainsi nous pouvons dire que l'élément fini rectangulaire de 4noeud avec 3 degrés de liberté par nœuds utilisé pour cette analyse a donné des bons résultats

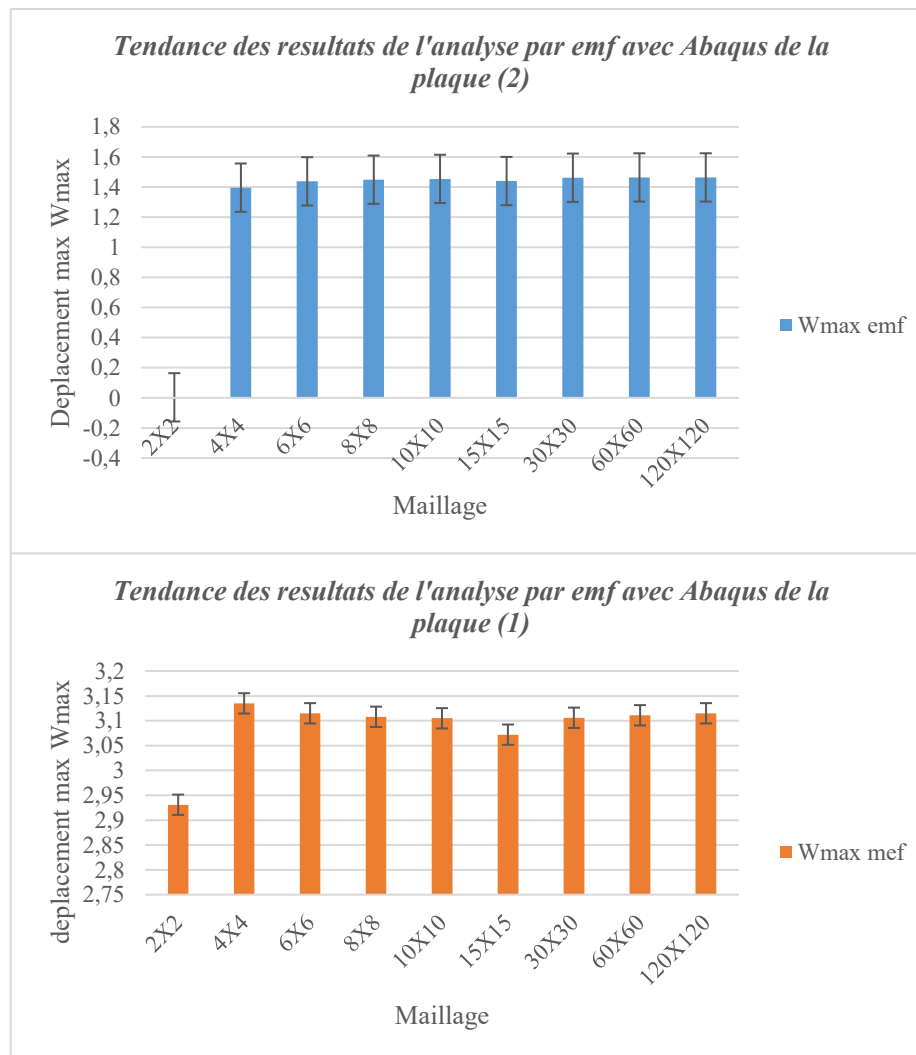


Figure 3-8 Convergence des résultats avec Abaqus Pour la plaque (1) & (2)

3.3 Comparaison des résultats obtenus

Cette section présente une comparaison synthétique des résultats de déplacement maximal obtenus pour les plaques simplement appuyées sur ses 4 bords (SSSS) et simplement appuyée sur deux bords opposés et encastrée sur deux autres (SSCC) à l'aide des quatre approches

étudiées : les méthodes analytiques (Navier et Levy) et les méthodes numériques (MDF et MEF réalisées sous Abaqus). Cette analyse comparative s'appuie sur le *Tableau 3-9*, qui récapitule les valeurs obtenues par différentes approches **et inclut également un indicateur quantifiant l'écart des solutions numériques (MDF et MEF) par rapport aux solutions exactes de référence données par les méthodes analytiques**. L'analyse s'appuie également sur les diagrammes de comparaison des *Figure 3-9 & Figure 3-10*.

3.3.1 Définition de l'indicateur de comparaison

Pour évaluer de manière quantitative l'écart entre les résultats obtenus par les méthodes numériques (MDF et MEF) et les solutions analytiques de référence, nous utilisons le taux de réduction (-) ou augmentation (+) du déplacement maximal. Cet indicateur permet de mesurer l'écart relatif de la valeur numérique par rapport à la valeur analytique exacte.

En prenant la valeur analytique exacte ($w_{max,analytique}$) comme référence, le taux est calculé pour chaque méthode numérique et chaque finesse de maillage selon la formule suivante :

$$\text{Taux de reduction/augmentation (\%)} = \frac{w_{max,Numerique} - w_{max,analytique}}{w_{max,analytique}} \times 100$$

Un taux positif indique une **surestimation** du déplacement maximal par la méthode numérique, tandis qu'un taux négatif indique une **sous-estimation**.

Ce taux est représenté dans *Tableau 3-9* par les symboles φ pour la méthode de différences finies et ϑ pour la méthode des éléments finis

Tableau 3-9 Sommaire de résultats -Plaque (1) & Plaque (2)

Maillage		EMF		FDM		Navier/lévy
		w_{max} (mm)	ϑ (%)	w_{max} (mm)	φ (%)	w_{max} exact (mm)
Plaque (1)	2X2	2,931	-5,27959426	2,97527344	-3,84882048	3.094370191
	4X4	3,135	1,31302354	3,06820313	-0,84563463	
	6X6	3,115	0,66668846	3,0834375	-0,35330908	
	8X8	3,108	0,44047118	3,08876953	-0,18099514	
	10X10	3,105	0,34352092	3,09029297	-0,13176259	
	30X30	3,106	-0,72293196			
	60X60	3,111	0,37583768			
	120X120	3,115	0,53742145			
Plaque (2)	2X2	0,003546	-99,7571765	2,38037109	63,0033944	1.460319954
	4X4	1,396	-4,40451107	1,87839844	28,6292386	
	6X6	1,438	-1,52842902	1,67806641	14,9108729	
	8X8	1,449	-0,77516944	1,59046875	8,91234799	
	10X10	1,454	-0,43277872	1,54552734	5,8348439	
	30X30	1,462	-1,39147273			
	60X60	1,464	0,11504643			
	120X120	1,464	0,25200272			

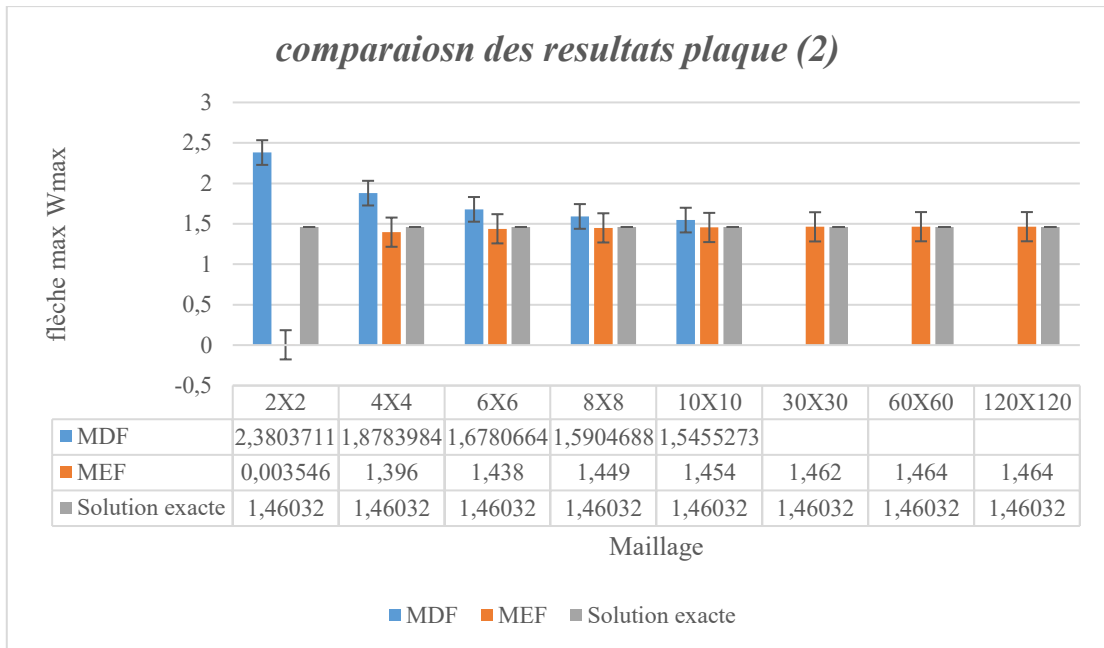


Figure 3-9 Diagramme de Comparaison résultats plaque (2)

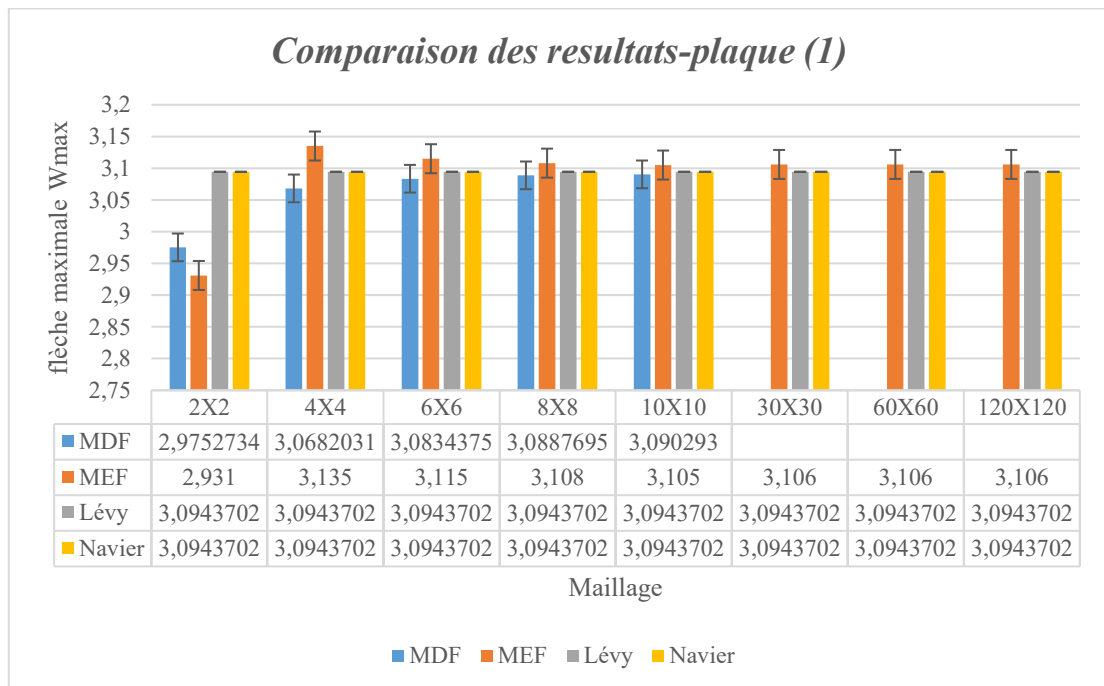


Figure 3-10 Diagramme de comparaison des résultats plaque (1)

3.3.2 Analyse et Interprétation des résultats

L'examen du Tableau 3-9, qui compile les déplacements maximaux obtenus par les méthodes numériques (MDF et MEF) en comparaison avec les solutions analytiques exactes (Navier/Lévy) pour les plaques SSSS et SSCC, ainsi que les taux de réduction/augmentation par rapport aux solutions exactes, permet de dégager plusieurs observations importantes quant à la performance de chaque approche.

- Les résultats obtenus par les méthodes analytiques de Navier et de Lévy, fournissant les solutions exactes pour ces cas de plaques sous charge uniforme (environ **3,094 mm** pour SSSS et **1,460 mm** pour SSCC), servent de référence pour évaluer les méthodes numériques.
- Méthode des Différences Finies (MDF) :
 - Pour la plaque SSSS, la MDF présente un taux de réduction du déplacement maximal, variant de -3,85 % (maillage 2x2) à environ -0,13 % (maillage 10x10). Le taux de réduction diminue en valeur absolue de manière monotone à mesure que la finesse du maillage augmente (d'où la sous-estimation de la flèche calculée par MDF par rapport à la flèche exacte), démontrant une bonne convergence rapide vers la solution exacte.
 - Pour la plaque SSCC, la MDF présente un taux d'augmentation du déplacement maximal pour les maillages étudiés. Il est très élevé au maillage grossier (63,00 % pour 2x2) mais diminue de manière monotone avec l'affinement du maillage, atteignant environ 5,83 % (maillage 10x10) par rapport à la solution exacte. Cette méthode sur estime la flèche maximale par rapport à la flèche exacte pour ce cas
- Méthode des Éléments Finis (MEF) :
 - Pour la plaque SSSS, la MEF présente initialement un taux de réduction de -5,28 % (maillage 2x2). Ce taux diminue avec l'affinement du maillage, mais le comportement de convergence, exprimé par le taux de réduction/augmentation, est non monotone, oscillant autour de la solution exacte (passant de réduction à augmentation et inversement). Pour les maillages fins (60x60, 120x120), le taux se stabilise autour de +0,38 % à +0,54 %.

- Pour la plaque SSCC, la MEF montre un taux de réduction très important au maillage le plus grossier (-99,76 % pour 2x2). Le taux d'écart diminue drastiquement dès que le maillage est affiné (passant à -4,40 % pour 4x4), mais la convergence, exprimée par le taux, est également non monotone, présentant des réductions et augmentations alternatives autour de la solution exacte. Pour les maillages les plus fins (60x60, 120x120), le taux d'écart est faible, autour de +0,12 % à +0,25 %

En synthèse, les méthodes analytiques confirment leur rôle de référence exacte pour la validation. La MDF démontre une convergence monotone et fiable, avec un taux d'écart diminuant de manière régulière, particulièrement rapide pour la plaque SSSS. La MEF, bien que capable de traiter les deux configurations dans Abaqus, présente un taux de réduction/augmentation dont le comportement de convergence est non monotone avec l'élément utilisé, nécessitant des maillages plus fins que la MDF pour atteindre un faible taux d'écart sur la SSSS aux maillages intermédiaires. Néanmoins, pour les maillages très fins, la MEF atteint un très faible taux d'écart pour les deux cas. Le taux de réduction initial très élevé de l'EMF au maillage 2x2 pour la plaque SSCC souligne la sensibilité de cette méthode à une discrétisation initialement insuffisante, particulièrement pour des cas plus complexes.

Cette analyse, en utilisant le terme "taux de réduction/augmentation", met en évidence que si la MDF est efficace pour les cas standards et présente une convergence prévisible en termes de taux d'écart, la MEF offre une polyvalence précieuse pour des cas plus complexes, bien que le comportement de ce taux puisse dépendre du choix de l'élément fini et de la finesse du maillage. L'évaluation du taux d'écart par rapport aux références analytiques est essentielle pour comprendre la fiabilité des résultats numériques obtenus à une finesse de maillage donnée, indiquant clairement si la méthode tend à sous-estimer (taux négatif) ou surestimer (taux positif) la flèche maximale.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et analysé en détail les résultats obtenus pour l'étude de la déformation des plaques rectangulaires SSSS et SSCC sous charge uniforme. Nous avons d'abord examiné les résultats issus des méthodes analytiques de Navier et de Lévy, en évaluant notamment la convergence de leurs solutions par série en utilisant le taux d'écart. Ensuite, nous avons présenté et analysé les performances des méthodes numériques : la Méthode des Différences Finies (MDF) et la Méthode des Éléments Finis (MEF) réalisée sous Abaqus, en observant leur comportement de convergence et leur précision respective pour les deux configurations de plaque. Enfin, nous avons procédé à une comparaison synthétique et une interprétation approfondie des résultats de l'ensemble des méthodes, en quantifiant les écarts des méthodes numériques par rapport aux références analytiques à l'aide du taux de réduction/augmentation, afin de dégager les forces et les limites de chaque approche pour ce type de problème.

Conclusion générale & perspectives

La présente étude a porté sur l'analyse de la déformation de plaques rectangulaires sous charge uniforme, avec pour objectif de comparer l'efficacité et la précision des méthodes analytiques classiques (Navier, Lévy) aux méthodes numériques courantes : la Méthode des Différences Finies (MDF) et la Méthode des Éléments Finis (MEF réalisée sous Abaqus). L'analyse a été menée sur deux configurations types de conditions aux limites : la plaque simplement appuyée sur ses quatre bords (SSSS) et la plaque avec appuis mixtes (SSCC).

Les travaux menés ont permis d'appliquer rigoureusement ces différentes approches et de confronter leurs résultats de déplacement maximal. Les méthodes analytiques ont confirmé leur rôle essentiel en tant que solutions de référence exactes pour la validation des modèles numériques sur ces cas fondamentaux. La comparaison quantitative, en analysant le taux de réduction/augmentation du déplacement maximal, a révélé des comportements de convergence distincts pour les méthodes numériques. La MDF a démontré une convergence généralement monotone et fiable, atteignant une grande précision pour les maillages fins, particulièrement rapidement pour la plaque SSSS. Pour la plaque SSCC, bien que sa convergence soit également monotone, son écart initial par rapport à la solution exacte était significativement plus important, soulignant l'impact de la complexité des conditions aux limites sur sa performance initiale. La MEF, réalisée avec un élément à 4 nœuds dans Abaqus, a présenté une convergence non monotone, les résultats oscillant autour de la solution analytique à mesure que le maillage s'affin. Néanmoins, pour les maillages les plus denses étudiés, la MEF a réussi à obtenir une approximation raisonnable, les résultats se stabilisant autour d'une certaine valeur pour les deux cas.

En conclusion, cette étude a validé la capacité des méthodes numériques à approximer la solution de problèmes de flexion de plaques, tout en mettant en évidence que leur fiabilité et la précision de l'approximation atteinte dépendent de la méthode choisie, de la finesse de la

discrétisation et de la complexité du problème. Si les méthodes analytiques sont limitées aux cas simples mais indispensables pour la validation, les méthodes numériques comme la MDF et la MEF offrent une polyvalence cruciale pour aborder une plus grande variété de problèmes d'ingénierie structurelle. La comparaison a souligné les forces spécifiques de la MDF en termes de convergence monotone et celles de la MEF en termes de flexibilité logicielle.

Ce travail offre ainsi aux ingénieurs une meilleure compréhension des avantages, des limites et de la précision relative de ces outils d'analyse essentiels, facilitant le choix de la méthode la plus appropriée pour la conception et la vérification des structures en plaques et contribuant à assurer leur sécurité et leur durabilité.

Bien que cette étude se soit limitée aux plaques minces, isotropes, rectangulaires, sous charge uniforme et conditions aux limites idéales, elle ouvre des perspectives pour des recherches futures incluant des théories de plaques plus avancées, des géométries et chargements variés, ou l'étude de comportements non linéaires ou dynamiques.

Bibliographie

- [1] E. Ventsel et T. Krauthammer, THIN PLATES AND SHELLS: theory, analysis, and applications, New York, Basel: Marcel Dekker, 2001.
- [2] S. Timoshenko et Woinowsky-Krieger, «Theory of plates and shells,» McGraw-Hill, 1959.
- [3] J. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates and shells, 2e éd., Boca Raton, London, New York, USA: CRC press, 2007.
- [4] B. H. A. Nizar, «Chapitre 1. Théorie générale de la flexion des plaques,» chez Plaques et coques.
- [5] O. C. Zienkiewicz et R. Taylor, The finite element method, 6e éd., Oxford U.K Butterworth-Heinemann, 2005.
- [6] P. B. Nadia, «Polycopie du cours Méthodes numériques approfondies,» 2021.
- [7] V. P. Sébastien Tordeaux, «Analyse numérique: La méthode des différences finies,» PAU, 2021.
- [8] M. KABDI, M. BENCHEIKH et M. B. Nasser, «Résolution de l'équation différentielle (bi-Laplacien) par la solution de CLEBSCH,» Ouargla, 2013.
- [9] G. HEMZA, «Calcul dynamique des plaques rectangulaires reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés inertielles,» 2021.
- [10] A. C. Ugural, PLATES AND SHELLS: Theory and Analysis, 4e éd., London: CRC Press, 2018.

- [11] o. Berrah., h. Rezgui. et h. F. A. e. e. Lammair, «Etude numérique des plaques par la méthode des éléments finis,» 2023.
- [12] M. A. Alhamid, «Calcul de la déformé d'une plaque mince carrée soumise à un effort par la méthode des éléments finis et logiciel ANSYS,» 2021.
- [13] «Dspace de l'université Ibn de Khaldoun de Tiaret,» [En ligne]. Available: <http://dspace.univ-tiaret.dz/bitstream/123456789/11773/12/13-Chapitre%20II%20final%202.pdf>. [Accès le 27 juillet 2024].
- [14] E. MANSFIELD, The Bending and stretching of plates, 2e éd., Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [15] A. C.UGURAL, Stresses in beams, plates and shells, 3e éd., London: CRC Press, 2010.
- [16] N. BOURAHLA, RESISTANCES DES MATERIAUX DE BASE, GECOTECH.
- [17] R. Szilard, Theories and applications of plates analysis, Canada: John Wiley & Sons, 2004.
- [18] E. H. Mansfield, The Bending and Stretching of Plates, Cambridge University Press, 2005.
- [19] P. M. E. GADARI, «CONCEPTION ET CALCUL DES STRUCTURES EN PLAQUES ET COQUES».
- [20] Timoshenko et Gere, Theory of elastic stability, 2e éd., Singapore: Mc Graw Hill, 1963.
- [21] J. D. Hoffman, Numerical methods for ingeneers and scientists, 2e éd., New york: Marcel Dekker, 2001.
- [22] M. Estanave, «Contribution à l'étude de l'équilibre statique d'une plaqu rectangulaire mince,» Annales scientifiques de l'E.N.S, vol. 17, pp. 295-358, 1900.

- [23] B. H. A. Nizar, «Chapitre 2 :Plaques rectangulaires».
- [24] G. D. S. Silva, «Modulo de software:Método de Navier para análise estrutural de placas retangulares quadripoiadras,» Votuporanga, 2022.
- [25] S. Bhavikatti, Theory of plates and shells, New delhi: New Age International (P) Ltd.,, 2012.
- [26] R. L. Burden, J. D. Faires et A. M. Burden, Numerical Analysis, 10e éd., Cengage Learning, 2016.
- [27] P. B. Nadia, Polycopie de cours methodes numeriques approfondies, 2021.
- [28] D. B. A. E. malik, « POLYCOPIE Méthodes numériques I ,Méthodes des différences finies».
- [29] R. P. C. Steven C. Chapra, NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS, 7e éd., New York: McGraw-Hill Education., 2015.
- [30] K. Pisacic, «Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica,» <https://www.researchgate.net/publication/336015442>, 02 December 2020.
- [31] A. Gilat et V. Subramaniam, Numerical Methods for Engineers and Scientists An Introduction with Applications using MATLAB, 3e éd., John Wiley & Sons, Inc, 2014.
- [32] «<https://matrixcalc.org/fr/>,» [En ligne].
- [33] K.-J. Bathe, Finite element Procedures, New Jersey: PRENTICE HALL, 1996.
- [34] A. UGURAL, Mechanical Engineering Design, 3e éd., Newyork: CRC Press, 2015.
- [35] DJERIR et LOUNIS, «Etude des plaques par la methode des elements finis,» Alger, 1988.
- [36] A. C. UGURAL, Mechanical Engineering Design, 3e éd., New york: CRC PRESS, 2015.

- [37] J. PRZEMIENIECKI, Theory of matrix structural analysis, New york: McGraw-Hill, 1968.
- [38] Pdfcofee.Ccom, «Présentation du logiciel Abaqus».
- [39] A. Khennane, Introduction to finite element analysis using MATLAB ans ABAQUS, New york: CRC Press, 2013.
- [40] D. :. D. Samir, «Polycopié de Travaux Pratiques : Logiciels de simulation numérique en mécanique ABAQUS,» 2019.
- [41] M. B. Abderrahmane, «Evaluation d'éléments finis volumiques dans Abaqus sur des cas tests non linéaires géométriques,» Juin 2014.

Annexe

Annexe A : Quelques caractéristiques mécaniques des matériaux [10]

Matériaux	Module d'Young E en GPa	Coefficient de Poisson
Acier de construction	210	0,27 – 0,30
Acier inoxydable 18-10	203	0,30 – 0,31
Fontes	83 à 170	0,21 – 0,26
Laiton (Cu + Zn)	100 à 130	0,37
Aluminium (Al)	69	0,346
Cuivre (Cu)	124	0,33
Titane (TO)	114	0,34
Béton	20 à 50	0,20
Verre	69	0,18 – 0,3
Caoutchouc	0,001 à 0,1.	0,50
Polystyrène	0,003	0,4

Annexe B : Code MATLAB pour l'analyse d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur 4 bords et soumise à une charge uniformément répartie selon la méthode de Navier

```

clc; clear; close all;

%% Paramètres du problème
a = 1500;      % mm (longueur de la plaque)
b = 1500;      % mm (largeur de la plaque)
h = 12;        % mm (épaisseur de la plaque)
p0 = 0.005;    % KN/mm2 (pression uniformément appliquée)
nu = 0.3;      % coefficient de poisson (matériau Acier)
E=210000;      % KN/mm2 (module d'élasticité pour acier)
D = 33230769.230769; % N·mm, rigidité en flexion de l'acier calculée par la
formule  $D=(Eh^3/12(1-\nu^2))$ 

%% Définition de la plage de m et n pour la série (m et n impairs)
max_mn = input('Entrez la valeur maximale de m et n (impair) : ');
M_values = 1:2:max_mn;
N_values = 1:2:max_mn;

%% Calcul de la déformation au centre (x=a/2, y=b/2)
w_center = zeros(length(M_values), length(N_values));
for i = 1:length(M_values)
    for j = 1:length(N_values)
        m = M_values(i);
        n = N_values(j);
        term = (sin(m*pi/2) * sin(n*pi/2)) / ((m^2/a^2 + n^2/b^2)^2 * m *
n);
        w_center(i,j) = (16 * p0) / (D * pi^6) * term;
    end
end

% Somme (déformation totale au centre, théorique w_max)
sum_w_center = sum(w_center, 'all');

%% Affichage du tableau de déformation au centre
fprintf('Tableau des contributions aux déplacements au centre (en mm) pour
m,n jusqu''à %d\n', max_mn);
fprintf('  m/n  |');
fprintf(' %6d', N_values);
fprintf('\n-----\n');
for i = 1:length(M_values)
    fprintf(' %4d  |', M_values(i));
    for j = 1:length(N_values)
        fprintf(' %12.10f ', w_center(i, j));
    end
    fprintf('\n');
end
end

```

```
fprintf('\nSomme totale (déformation max au centre) : %12.10f mm\n',
sum_w_center);

%% Calcul de la déformation w(x,y) sur toute la plaque
nx = 50; ny = 50;
[x, y] = meshgrid(linspace(0,a,nx), linspace(0,b,ny));
w_xy = zeros(ny, nx);

for m = M_values
    for n = N_values
        coeff = (16 * p0) / (D * pi^6) * (sin(m*pi/2) * sin(n*pi/2)) / (m *
n * ((m^2/a^2 + n^2/b^2)^2));
        w_xy = w_xy + coeff * (sin(m*pi*x/a) .* sin(n*pi*y/b));
    end
end

%% Représentation 3D de la déformation sur la plaque
figure;
surf(x, y, -w_xy, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('x (mm)'); ylabel('y (mm)'); zlabel('Déplacement (mm)');
title('Déformation plaque (1) Navier 3D - Acier');
colorbar;
shading interp;
view(-45,30);
```

Annexe C : Code MATLAB pour l'analyse d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur 4 bords et soumise à une charge uniformément répartie selon la méthode de Lévy

```

clc; clear; close all;

%% Paramètres du problème
a = 1500;          % mm, dimension de la plaque (carré, a=b)
b = 1500;          % mm
h = 12;           % mm, épaisseur de la plaque
p0 = 0.005;       % N/mm², 10 kPa converti (1 kPa = 0.001 N/mm²)

% Matériau et valeur de rigidité pour l'Acier
matériau = 'Acier';
nu = 0.3;         % coefficient de poisson
E=210000;         % KN/mm² (module d'élasticité)
D = 33230769.230769; % N·mm, rigidité en flexion de l'acier calculée par la
formule D=(Eh³/12(1-nu²))
%% Méthode de Levy : Calcul de la déformation maximale au centre
% Formule de Levy :
% w_max = (p0*a⁴/D)*[5/384 - (4/pi⁵)*sum_{m impair} { (-1)^((m-1)/2)/m⁵
* ((alpha*tanh(alpha)+2)/(2*cosh(alpha))) } ]
% avec alpha = m*pi/2 (pour a=b)

max_m = input('Entrez la valeur maximale de m (impair) pour la série de
Levy : ');
M_values = 1:2:max_m; % valeurs impaires

w_center = zeros(length(M_values), 1); % stockage pour l'acier uniquement
S = 0; % somme partielle
for idx = 1:length(M_values)
    m = M_values(idx);
    alpha = m * pi / 2; % puisque a=b
    term = ((-1)^((m-1)/2)) / (m⁵) * ((alpha * tanh(alpha) + 2) / (2 *
cosh(alpha)));
    S = S + term;
    w_center(idx) = (p0 * a⁴ / D) * (5/384 - (4/pi⁵) * S);
end

% Affichage du tableau de convergence au centre avec 9 décimales
fprintf('Tableau des déformations maximales au centre (méthode de Levy)
pour l''%s :\n', matériau);
fprintf(' m | %s (mm)\n', matériau);
fprintf('-----\n');
for i = 1:length(M_values)
    fprintf(' %3d | %14.9f\n', M_values(i), w_center(i));
end

```

```
%% Représentation 3D de la déformation sur la plaque (méthode de Levy)
nx = 50; ny = 50;
[x, y] = meshgrid(linspace(0, a, nx), linspace(0, b, ny));
S_field = zeros(ny, nx); % somme spatiale pour chaque point (pour l'acier)
for m = M_values
    alpha = m * pi / 2;
    coeff = ((-1)^((m-1)/2))/(m^5) * ((alpha * tanh(alpha) +
2)/(2*cosh(alpha)));
    % Chaque mode spatial est pondéré par sin(m*pi*x/a)*sin(m*pi*y/a)
    S_field = S_field + coeff * ( sin(m*pi*x/a) .* sin(m*pi*y/a) );
end
w_field = (p0 * a^4 / D) * (5/384 - (4/pi^5) * S_field);

figure;
surf(x, y, w_field, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('x (mm)'); ylabel('y (mm)'); zlabel('Déplacement (mm)');
title(['Déformation Plaque carrée SSSS 3D (Levy) - ', materiau]);
colorbar;
shading interp;
view(-50,50);
```

Annexe D : Code MATLAB pour l'analyse d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur 2 bords opposés et encastree sur les deux autres, soumise à une charge uniformément répartie selon la méthode de Lévy

```

clc; clear; close all;

%% Paramètres de la plaque et du chargement
a = 1500;      % mm (longueur de la plaque)
b = 1500;      % mm (largeur de la plaque)
h = 12;        % mm (épaisseur de la plaque)
p0 = 0.005;    % KN/mm² (pression uniformément appliquée)
nu = 0.3;      % coefficient de poisson (matériau Acier)
E=210000;      % KN/mm² (module d'elasticité pour acier)
D = 33230769.230769; % N·mm, rigidité en flexion de l'acier calculée par la
formule  $D=(Eh^3/12(1-\nu^2))$ 
% Nombre maximal de termes (m impairs)
max_m = input('Entrez la valeur maximale de m (impair) : ');
M_values = 1:2:max_m; % ex: 1,3,5,...

% Pour rappel,  $\alpha_m = (m\pi*b)/(2*a)$ .

%% --- 1) Convergence au point de déflexion maximale ---
% Pour la méthode de Lévy, le maximum se trouve aux coordonnées :
x_point = a/2;
y_point = 0;

% Initialisation des sommes partielles
S1 = 0; % somme partielle pour w1
S2 = 0; % somme partielle pour w2

w1_center_vals = zeros(length(M_values),1);
w2_center_vals = zeros(length(M_values),1);
w_center_vals = zeros(length(M_values),1);

for idx = 1:length(M_values)
    m = M_values(idx);
    alpha_m = (m*pi*b)/(2*a);

    % --- Nouvelle expression pour w1 ---
    term_w1 = (-1)^((m-1)/2) / m^5 * ( (alpha_m * tanh(alpha_m) + 2) / (2 *
cosh(alpha_m)) );
    S1 = S1 + term_w1;

    w1_current = (p0*a^4)/D * (5/384 - (4/pi^5) * S1);
    w1_center_vals(idx) = w1_current;

    % --- Expression inchangée pour w2 ---

```

```

coefficient = (-1)^((m-1)/2) / m^5;
fraction = (alpha_m*tanh(alpha_m) / cosh(alpha_m)) * ...
            ((alpha_m - tanh(alpha_m)*(1+alpha_m*tanh(alpha_m))) / ...
            (alpha_m - tanh(alpha_m)*(alpha_m*tanh(alpha_m)-1)));

S2 = S2 + coefficient * fraction;
w2_current = (2*p0*a^4)/(pi^5*D) * S2;
w2_center_vals(idx) = w2_current;

% La déflexion finale est : w_max = w1 + w2
w_center_vals(idx) = w1_current + w2_current;
end

%% Affichage de la convergence au point (x_point,y_point)
fprintf('\nConvergence de w(x = %g, y = %g) par la méthode de Lévy (2 bords
appuyés, 2 encastés) :\n', x_point, y_point);
fprintf(' m | w1 (mm) | w2 (mm) | w_max
= w1 + w2 (mm)\n');
fprintf('-----\n');
for i = 1:length(M_values)
    fprintf('%3d | %18.9f | %18.9f | %18.9f\n', ...
        M_values(i), w1_center_vals(i), w2_center_vals(i),
w_center_vals(i));
end

%% --- 2) Calcul du champ w(x,y) sur la plaque ---
nx = 50; ny = 50;
[x_grid, y_grid] = meshgrid(linspace(0,a,nx), linspace(0,b,ny));

w1_field = zeros(ny, nx);
w2_field = zeros(ny, nx);

for m = M_values
    alpha_m = (m*pi*b)/(2*a);

    % Nouvelle expression pour w1
    term_w1_spatial = (-1)^((m-1)/2) / m^5 * ( (alpha_m * tanh(alpha_m) +
2) / (2 * cosh(alpha_m)) );
    w1_field = w1_field + term_w1_spatial;

    % Expression inchangée pour w2 :
    coefficient = (-1)^((m-1)/2) / m^5;
    fraction = (alpha_m*tanh(alpha_m) / cosh(alpha_m)) * ...
                ((alpha_m - tanh(alpha_m)*(1+alpha_m*tanh(alpha_m))) / ...
                (alpha_m - tanh(alpha_m)*(alpha_m*tanh(alpha_m)-1)));

    w2_field = w2_field + coefficient * fraction;
end

% Application des coefficients globaux
w1_field = (p0*a^4)/D * (5/384 - (4/pi^5) * w1_field);

```

```
w2_field = (2*p0*a^4)/(pi^5*D) * w2_field;
% La solution finale est w_max = w1 - w2
w_field = w1_field - w2_field;

%% --- 3) Nouvelle Visualisation 3D ---

figure;
mesh(x_grid, y_grid, w_field, 'EdgeColor', 'interp'); % Utilisation de mesh
pour une meilleure visualisation
xlabel('x (mm)');
ylabel('y (mm)');
zlabel('Déplacement w(x,y) (mm)');
title('Déformation de la plaque - Méthode de Lévy');
colormap jet; % Meilleure palette de couleurs pour visualiser l'amplitude
colorbar;
shading interp; % Interpolation des couleurs pour un rendu plus lisse
view(-45, 30); % Ajustement de l'angle de vue pour une meilleure
perspective
grid on;
```